

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540198

研究課題名(和文) 作用素不等式と非正規作用素のスペクトル解析

研究課題名(英文) Operator Inequalities and Spectral Analysis of Non-normal operators

研究代表者

内山 敦 (UCHIYAMA ATSUSHI)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：00353227

研究成果の概要(和文): 私の研究は、作用素不等式またはノルム不等式で定義された非正規作用素族についての特徴づけであるが、本補助金による研究期間での主要な成果は以下の2点である。

(1) スペクトラムの孤立点と対応するリース射影の研究では、 $(p,k)$ -キューサイハイポノーマル作用素のスペクトラムの0以外の孤立点は固有値であり、対応するリース射影は直交射影となり、その像が固有空間に一致すること、この応用としてこの作用素のスペクトラムとワイル・スペクトラムの差集合が重複度有限の孤立固有値全体の集合に一致すること(ワイルの定理)を示した。また同様の結果がキューサイクラス  $A(p, k)$  でも成立することを示した。

(2) Bishop's property ( ) や single valued extension property (SVEP) に関する研究としては、作用素の(近似点)スペクトラムに関する性質 ( ), ( ), ( ) を定義し、これらの性質を持つ作用素は Bishop's property ( ) と SVEP を持つこと、系として paranormal operator がこれらの性質を持つことを示した。この結果を、パーコフ・ジェームズの直交性という概念を取り入れることで hereditarily normaloid というさらに広い作用素族まで拡張した。

研究成果の概要(英文): My research is to characterize the classes of operators which are defined by operator inequalities or operator norm inequalities. The following two results are main results in this period:

(1) We show that for a  $(p,k)$ -pquasihyponormal operator  $T$  and a non-zero isolated point of its spectrum,  $\lambda$  is an eigenvalue of  $T$  and the Riesz idempotent  $E$  is self-adjoint whose image is equal to the kernel of  $T - \lambda I$ . As a corollary, we obtain that every  $(p,k)$ -quasihyponormal operator satisfies Weyl's theorem,

(2) We define three properties ( ), ( ), ( ) of (approximate point) spectrum of operators and show that every operator with at least one of these properties has Bishop's property ( ) and (SVEP), moreover, we show that every paranormal operator has Bishop's property ( ) and (SVEP). By using Birkoff-James orthogonality, we extend property ( ) and show that every operator with this property has Bishop's property ( ) and (SVEP). As a corollary, we obtain that every hereditarily normaloid operator has Bishop's property ( ) and (SVEP).

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：作用素論

## 1. 研究開始当初の背景

正規作用素はヒルベルト空間上の誘拐線形作用素の中で最も重要な作用素の一つである。この正規作用素の条件を弱めることで様々な非正規作用素族が定義される。これらの非正規作用素の研究はこの50年間作用素論の主要な話題の一つである。具体的には、これらがどのような性質を持っているか、特に、正規作用素のどのような性質を受け継いでいるか、または正規作用素のどのような性質が失われたかを研究するのが主流である。1970年にパットナムがハイポノーマル作用素(自己交換子 0となる作用素)の自己交換子の作用素ノルムの値は、そのハイポノーマル作用素のスペクトラムの2次元ルベグ測度を円周率で割った値以下であること(パットナムの不等式)を示し、1973年にはバーガー・ショーが作用素ノルムを跡ノルムに拡張した評価式(バーガー・ショーの不等式)を示した。これ等の結果は単にハイポノーマル作用素の非正規性の度合いを評価しただけでなく、代数的に定義された非正規作用素に積分論が密接に関わっていることを明らかにした点で驚くべき結果である。また1978年にブラウンが、作用素論の大問題である不変部分空間問題をサブノーマル作用素(正規作用素への拡大を持つような作用素)に関して肯定的(非自明な不変部分空間を持つ)に解いた後、多くの研究者が研究対象としてハイポノーマル作用素(サブノーマルはハイポノーマルの部分族)を選び研究が発展した。しかし、不変部分空間問題がハイポノーマルでは未解決であることが原因なのか、ハイポノーマルを含む非正規作用素族へ研究を移行した者は少ない。私は、正規作用素には不変部分空間を持つこと以外にも多くの重要な性質を持つことに着目し、非正規作用素が正規作用素(あるいはハイポノーマル作用素)のどのような性質を受け継ぎ、どのような性質を失っているかという観点で研究対象にハイポノーマル作用素を含むような非正規作用素族を選んだ。具体的には、正規作用素に関するフグレデ・パットナムの定理、ワイルの定理、固有値または近似固有値の正規性、相異なる固有値に属する固有空間どうしの直交性、スペクトラムの孤立点が固

有値になること、および対応するリース射影作用素がその固有値に属する固有空間への直交射影になること、一般化されたスペクトル写像定理、single valued extension property(略してSVEP)及びビショップの性質( )などに着目し、定義はされているがあまり深く研究されていなかった種々の作用素族について、上記の性質について作用素のスペクトラムの性質を手掛かりに研究を始めたのが出発点である。今回の科学研究費補助金による研究開始までに以下のような結果(一例)を得ている。正規作用素のdouble commuteという重要な性質を導くフグレデ・パットナムの定理についてはM-ハイポノーマル、クラスY, p-ハイポノーマル、Log-ハイポノーマルといった非正規作用素族にも拡張されることを示し、正規作用素のワイルの定理については、M-ハイポノーマル、クラスA, p-ハイポノーマル、p-キューサイハイポノーマルまで拡張し、非正規性を図る目安である自己交換子のノルムをスペクトラム上の積分で評価するパットナム型不等式やバーガー・ショウ型不等式については、p-ハイポノーマルやp-キューサイハイポノーマルの場合まで拡張した。

## 2. 研究の目的

ヒルベルト空間上のパラノーマル作用素およびその部分族について、ハイポノーマル同様深い結果を得ること、これらの作用素が正規作用素のどのような性質を受け継ぎ、また、どのような性質を失っているのか研究する。対象を広げることで正規作用素の種々の性質に本質的に関係している(スペクトラム等の)性質が得られると期待している。正規作用素やハイポノーマル作用素の性質であるフグレデ・パットナムの定理、ワイルの定理、パットナム型およびバーガー・ショウ型不等式、スペクトラムの孤立点が固有値であること、スペクトラムの孤立点と対応するリース射影の自己共役性、一般化されたスペクトル写像定理、ビショップの性質( )やsingle valued extension property (SVEP)について種々の非正規作用素がこれらの性質を持つかどうか調べる。

### 3. 研究の方法

研究対象として取り上げる正規作用素 (またはハイポノーマル)の性質 P(ワイルの定理, フグレデ・パットナムの定理, リース射影の直交性, ...) について,

<1> 性質 P を持つ作用素族を幾つか見つける

<2> <1>で得られた作用素族の共通する性質(Q とする)で「Q P」を満たすものを見つける

を繰り返し行っている. 性質 P を持つような非正規作用素族が多く見つければ、それらの共通性質 Q は弱まり最終的には性質 P に本質的に関係している条件等が得られると期待される. このように性質 P を持つような作用素族を多く見つけそれらに共通するスペクトラムの性質 Q を調べるのが私の研究手法である.

### 4. 研究成果

私の研究は先に述べたように, 作用素不等式またはノルム不等式で定義された正規作用素を含むような非正規作用素族の特徴付けであり, 正規作用素のどのような性質を受け継ぎどのような性質を失っているか, 受け継いでいる性質に本質的に係わっている(スペクトラム)の性質は何かを探ることである. 上記の手法で, リース射影の自己共役性については、初期の段階では、性質 Q は固有値の正規性 (ハイポノーマル、p - ハイポノーマル、Log - ハイポノーマルの共通性質)であったがこれが、0 以外の固有値の正規性 (w - ハイポノーマル、クラス A、p - クエーサイハイポノーマル、クラス A(s, t)、(p, k) - クエーサイハイポノーマルの共通性質)と弱まり、最終的には、0 以外のスペクトラムの孤立点が正規固有値になる(上記の作用素族およびパラノーマルの共通性質)という本質的条件とそれを持つ作用素族の例(パラノーマル)が得られた。また、ビショップの性質 ( ) に関しては、初期の段階では、性質 Q は固有値の正規性、これが 0 以外の固有値の正規性となり、最終的には、相異なる近似固有値に対応する固有空間(パーリアンの手法で可分でないヒルベルト空間に持ち上げて得られる固有空間)が互いに直交という本質的な条件とそれを持つ作用素族の例(パラノーマル)が

得られた。

今回の科学研究費補助金の研究期間では以下の 2 つが主要な結果である。

スペクトラムの孤立点と対応するリース射影の研究では、(p,k)-クエーサイハイポノーマル作用素について一般化されたスペクトル写像定理を示すことで、スペクトラムの 0 以外の孤立点は固有値であり、対応するリース射影は直交射影となり、その像が固有空間に一致すること、および、この作用素のクエーサイ冪零部分がリース射影の像すなわち固有空間に一致することを示した。この応用として、この作用素のスペクトラムとワイル・スペクトラムの差集合が重複度有限の孤立固有値全体の集合に一致すること(ワイルの定理)を示した。また quasi-class(A, k) というもっと大きな作用素でも 0 以外のスペクトラムの孤立点は固有値であり、対応するリース射影が直交射影かつその像が固有空間になること、および、ワイルの定理が聖知ることを示した。

Bishop's property ( ) や single valued extension property (SVEP) に関する研究としては、作用素の(近似点)スペクトラムに関する性質 ( ), ( ), ( ) を定義し、これらの性質を持つ作用素は Bishop's property ( ) と SVEP を持つこと、系として paranormal operator がこれらの性質を持つことを示した。ここで、性質 ( ) は固有値の正規性を一般化した性質で近似固有値が正規近似固有値であること、性質 ( ) は 0 以外の固有値の正規性を一般化した性質で 0 以外の近似固有値が正規近似固有値であること、さらに、性質 ( ) は相異なる固有値に対応する固有空間が互いに直交するという一般化した性質で相異なる近似固有値に対応する近似固有(単位)ベクトル列は近似的に直交する(内積が 0 に収束)ということである。正規作用素、ハイポノーマル、p - ハイポノーマル、Log - ハイポノーマルが性質 ( ) を持ち、w - ハイポノーマル、クラス A、クラス A(s,t)、p - クエーサイハイポノーマル、(p, k) クエーサイハイポノーマル等が性質 ( ) を持つ。

パラノーマルは一般に性質 ( ), ( ) を持たないが、今回の研究で性質 ( ) を持

つことも示している. 性質( )の直交(内積 = 0)をバーコフ・ジェームズの直交性という概念に取り換えることで hereditarily normaloid というさらに広い作用素族まで Bishop's property ( ) や SVEP を拡張した. この概念はバナッハ空間でも用いることができるのでバナッハ空間での hereditarily normaloid 作用素についても Bishop's property ( ) や SVEP が示せたことになる.

5 . 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

S. Mecheri and A. Uchiyama, An extension of the Fuglede-Putnam's theorem to class A operators, Math. Ineq. Appl., 2010, 57-61. (査読あり)

S. M. Patel, K. Tanahashi and A. Uchiyama, On extension of some Fuglede-Putnam type theorems involving (p, k)-quasihyponormal, Spectral, and dominant operators, Math. Nachr. 2009, 1022-1032. (査読あり)

A. Uchiyama and K. Tanahashi, Bishop's property ( ) for paranormal operators, Operator and Matrices, 2009, 517-524. (査読あり)

S. Mecheri, K. Tanahashi and A. Uchiyama, Weyl type theorem for (p, k)-quasihyponormal operators, Sci. Math. Jpn., 2009, 225-231. (査読あり)

T. Miura, H. Oka, G. Hirasawa, S. Takahashi, N. Niwa and A. Uchiyama, A perturbation of normal operators on a Hilbert space, Nonlinear Funct. Anal. Appl, 2008, 549-557. (査読あり)

K. Tanahashi, I. H. Jeon, I. H. Kim and A. Uchiyama, Quasinilpotent part of class A or (p, k)-quasihyponormal operators, Operator Theory: Advances and

Applications, 2008, 199-210. (査読あり)

[学会発表](計 2件)

A. Uchiyama, Numerical range and the unitarity, International Conference on commutative Banach algebras and their Applications, 2010. 3. 21. 山形大学工学部

A. Uchiyama, Some spectral properties which imply Bishop's Property ( ), International Conference: Operator theory and Its Applications(KOTAC 2009), 2009.6.20. 韓国 慶北大学

6 . 研究組織

(1)研究代表者

内山 敦 (UCHIYAMA ATSUSHI )  
山形大学・理学部・准教授  
研究者番号 : 00353227

(2)研究分担者

( )

研究者番号 :

(3)連携研究者

( )

研究者番号 :