

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 10 日現在

機関番号：120601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540203

研究課題名（和文）マクドナルド多項式と多変数超幾何級数の研究と格子模型への応用

研究課題名（英文）Macdonald polynomials, multivariable hypergeometric series and their application to lattice models

研究代表者

白石 潤一（SHIRAISHI JUNICHI）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20272536

研究成果の概要（和文）：Ding-Iohara 代数の表現論を研究し、それが A 型のマクドナルド多項式と深く関係していることを示した。Ding-Iohara 代数（ないし、変形ビラソロ/変形 W 代数）の加群の間の準同型写像のある行列要素が多変数超幾何級数の形に書けて、それがマクドナルド作用素の固有関数となることを見いだした。その級数は座標変数と運動量変数の間の双対性を持つ。D 型と C 型のマクドナルド多項式についても、分割が一行の場合について、変形 W 代数の構造を用いて多変数超幾何級数の表示を構成した。

研究成果の概要（英文）：I studied the representation theory of the Ding-Iohara algebra, clarifying a deep connection with the Macdonald polynomials. It was found that certain matrix elements of the homomorphisms of Ding-Iohara (or deformed Virasoro/W) algebra can be written as multivariable hypergeometric series, and are eigenfunctions of the Macdonald difference operator. The series have a duality between the coordinate variables and momentum ones. For the Macdonald polynomials of type D and C, with one row partitions, similar hypergeometric series expressions are obtained by using the deformed W algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：可解格子模型、数理物理学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可能積分系

1. 研究開始当初の背景

本研究の開始に当たって特に重要であったこと 4 点を箇条書きする。

(1) 私は、バクスターの 8 頂点模型の相関関数を研究して、それがマクドナルド作用素数に関するある種の（準）固有関数として特徴付けられることを発見した。それは非常に

非自明であり、興味深いことであった。より具体的に述べると、ある種の変形ビラソロ/変形 W 代数の加群の準同型写像の行列要素が、多変数超幾何級数の形に表現できること、及び、その超幾何級数がマクドナルド差分作用素の固有関数であること、の 2 つが同時に成立しているのである。しかも、このような

現象が、ワイル群の型に依らず成立している、という観察もあった。そこで、私は一旦特定の格子模型の相関関数の研究から離れて、私が得たそのような数学的現象の徹底的な究明を当面の目標とした。

(2) 私は以前にマクドナルド差分作用素の成す可換環をフォック空間の上に頂点作用素の第零フーリエ成分として構成できることを見いだしていた。また、同様の可換環を変形ピラソロ/W 代数の加群の上に構成することは、KdV/KP 方程式の量子化/差分化と密接に関連している。このような可換環の双対概念がフェイギン・オデスキー代数であることは、いろいろな事情から明らかであった。このことから、私は上述の可換環の系列が特殊な表現の系列として与えられるようなホップ代数(量子群)を特定することが重要であると判断した。別の角度から見ると、変形ピラソロ/変形 W 代数には余積の構造が入るかどうかわかっていなかった。仮に、何らかの方法で変形ピラソロ/変形 W 代数テンソル積表現を構成する方法が存在したとすれば、それはこれまでの困難を取り除くために非常に重要な働きをするものと考えられた。

(3) 私は、第(1)の項目に述べた超幾何級数が、座標変数と運動量変数の間の入れ替えについて全く不変であるという双対性を持つことを期待した。これは、マクドナルド多項式を持つ双対性を反映するものであり、その背後には非常に大きな対称性が存在しているはずである。しかも、そのような対称性は第(2)の項目に述べた量子群に内在された対称性であるはずで、それを記述することがマクドナルド多項式のより深い理解に通じると判断した。量子群でそのような大きな対称性を持つものは、量子トロイダル代数と呼ばれるものが知られていた。しかし、マクドナルド多項式との関係をクリアに理解するという状況ではなかったと思われる。また、共形場の理論に内在されている $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称性と、ここに述べている対称性の関連全く不明であり何らかのはっきりした方針を確立することが強く望まれた。

(4) 楕円関数を係数に持つような量子群ないし可積分系の研究は色々な困難があり、なかなか進まない部分が多かった。例えば、マクドナルド多項式の楕円アナログとは何か、ルイセナス作用素の固有値問題をどのような空間の上に設定するか、など未解決の問題が多数存在する。状況をより良く理解するための一つの方針として、古典極限を調べることが重要であると考えた。そのような系は、ILW(Intermediate Long Wave)と呼ばれる微分積分方程式の差分アナログである、という観察から出発して、より大きな可積分系からのリダクションの方法、テータ関数による解の具体的構成法などの研究を行うことに

した。

2. 研究の目的

本研究の目的を上述の研究開始当初の背景に記した各項目と関連させながら述べる。

(1) ある種の多変数超幾何級数の構造を研究すること。より具体的には、そのような級数を構成すること、その級数に対する一連の変換公式と和公式を究明すること。そして、マクドナルド多項式のタブロー型明示公式及び双対性を多変数超幾何級数の立場から理解すること。そのような多変数超幾何級数を量子群の加群の準同型写像の行列要素として導くこと、ないしその逆問題、即ち、そのような多変数超幾何級数が加群の準同型写像の行列要素を与えるようなホップ代数を見いだすこと。

(2) ある表現の上でマクドナルド差分作用素の成す可換環を与えるような可換部分環を持つホップ代数を構成すること。そして、そのホップ代数の構造を研究すること。そして、新しい表現を構成すること。変形ピラソロ/W 代数との関係を明らかにすること。

(3) 超幾何級数の変換公式が示唆するホップ代数の対称性を明らかにすること、即ち、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用の研究。

(4) 差分 ILW 方程式の研究。ポアソン構造と広田方程式。広田方程式の特殊解の研究。特殊解に付随した運動の積分の値と、マクドナルド作用素の固有値の比較、及び、その楕円化における構造の追求。

3. 研究の方法

本研究の方法について項目ごとに説明する。

(1) マクドナルド差分作用素の固有関数となるような多変数の無限級数を、数式処理プログラムを援用しながら求める。無限級数の各係数に関する線形な漸化式を下から求めるのであるが、多次元的に配列された変数の間の漸化式を求めるための一般的な公式はもろろない。しかし私は、A型の場合に、各係数が他者との関係によって規則的に変化しながらより高次の係数を決定していること、そそのようないくつかの規則が全ての係数を決定することを知っている。B, C, D型、楕円の場合等他場合に対してこのような規則がないかどうか調べる。

もう一つの方法として、変形 W 代数の合成規則を用いる。私は、A型の変形 W 代数の生成元を多数掛けて適当に特殊化すると、自動的にマクドナルド多項式が生成されることを知っている。これと同じことを B, C, D型の変形 W 代数を用いて試みると、確かにマクドナルド多項式が生成される場合があることを実験的に確認できる。そこで得られた明示公式が確かにマクドナルド多項式となっていることを、超幾何級数の変換公式と和公式を用

いて証明する。

(2) ある種のフェイギン・オデスキー代数の構造を決定する。即ち、結合法則、積の可換性、生成元、そのヒルベルト多項式、などを研究する。そのフェイギン・オデスキー代数を用いて可換部分環が構成されるようなホップ代数を、所謂ドリinfeld基底を用いて構成する。そのホップ代数の構造と(テンソル積)表現の研究を行う。

(3) マクドナルド多項式に付随した多変数超幾何級数は、座標変数と運動量変数の入れ替えに関する双対性を持つことを、超幾何級数の変換公式と和公式を用いて直接証明する。若しくは、座標変数と運動量変数双方の差分方程式系を考察して、双方の同時固有関数の存在と一意性を証明し、作用素が入れ替え不変であるというあからさまな理由により、その同時固有関数も対称性をもつことを示す。

ドリinfeld基底で生成されたホップ代数がそのような双対性を持つことは全く自明ではない。具体的に(準)同型写像を構成する必要がある。

(4) ホップ代数から適当な可換極限をとってある種のポアソン代数を導く。それが差分ILW方程式を導くことを示す。その差分ILW方程式に対する広田方程式を導き、その特殊解を構成する。カソラチ行列式による τ 関数の表示を調べ、その解に付随する運動の積分の値を求める。また、テータ関数を用いて特殊解が構成できるために必要なリーマン面の性質を調べる。

4. 研究成果

本研究の成果について述べる。

(1) 小森氏、野海氏との共同研究で、ルイセナス型(楕円型、及び、BC型)の差分作用素に付随した核関数関係式を研究し、それを明示公式に関する幾つかの問題に応用した。野海氏との共同研究で、座標変数、及び、運動量変数双方のマクドナルド差分作用素の同時固有関数となるような多変数超幾何級数を構成した(A型)。その証明には、マクドナルド多項式のタブロー和公式、マクドナルド差分作用素の核関数関係式を用いる。星野氏、柴原氏との共同研究で、A型以外、(D型、C型、BC型、楕円型等)について同様の構造を模索し、D型、C型の場合のある特殊な系列(分割が一行の場合)に、タブロー和型の明示公式が得られた。

(2) フェイギン氏、橋爪氏、星野氏、柳田氏との共同研究で、リーマン球面上のフェイギン・オデスキー代数の構造を調べ、それが単位的結合代数を成し、さらに可換代数となることを示した。その可換環とマクドナルド差分作用素の成す可換環との同型を構成し

た。このフェイギン・オデスキー代数に付随したディン・庵原代数を導入し、その表現論を調べた。フェイギン・オデスキー代数を用いて、ディン・庵原代数の可換部分環の具体的な構成を行った。小島氏との共同研究で、変形ビラソロ/変形W代数に付随した運動の積分のフェイギン・オデスキー代数を用いた構成を研究した。

(3) ディン・庵原代数には自然に $SL(2, Z)$ が作用する。代数の元に対する $SL(2, Z)$ の作用を尊重するようにフォック空間の上の表現論とそのテンソル積表現を調べることが重要となる。その準同型写像(のある成分)は共形場の理論でのプライマリー場になることが期待される。ディン・庵原代数のプライマリー場の定義式を見だし、その行列要素に関する(AGT現象に類似した)予想を見いだした(栗田氏、フェイギン氏、金井氏、m星野氏、柳田氏との共同研究)。

(4) 土谷氏との共同研究で、ディン・庵原代数の可換極限に自然に誘導されるポアソン代数の構造を調べ、それがILW方程式の差分アナログを導くことを示した。二次元戸田階層のリダクションとしてこの可積分方程式系を特徴付けた。ポアソン構造と広田方程式の対応を調べ、低い次数の方程式に、運動の積分がどのように含まれているかを具体的に計算した。それらを用いて、カソラチ行列式解を得た。また、この特殊解上での運動の積分の値を具体的に計算し、それをマクドナルド差分作用素の固有値の構造と比較し、両者がほぼ同じ関数で書けていることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計11件)

- ① H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, Quantum algebraic approach to refined topological vertex, *J. High Energy Phys.* (2012), no. 3, 041, front matter+34 pp, doi:10.1007/JHEP03(2012)041.
- ② Y. Tutiya and J. Shiraishi, On some special solutions to periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian, *Math. Comput. Simulation* 82 (2012), no. 7, 1341-1347.
- ③ J. Shiraishi and Y. Tutiya, Periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian and 2D-Toda hierarchy. New trends in quantum integrable systems, 357-371, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2011. B

- ④ H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture, 京都大学数理解析研究所講究録, (2011), 1765, 12-32. (査読無).
- ⑤ B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi and S. Yanagida, Kernel function and quantum algebras, 京都大学数理解析研究所講究録, (2010), 1689, 133-152. (査読無).
- ⑥ T. Kojima and J. Shiraishi, The integrals of motion for the elliptic deformation of the Virasoro algebra and W_N algebra, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 12, e1915-e1921.
- ⑦ J. Shiraishi and Y. Yutiya, Periodic ILW equation with discrete Laplacian, J. Phys. A 42 (2009), no. 40, 404018, 15 pp.
- ⑧ B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi and S. Yanagida, A commutative algebra on degenerate CP^1 and Macdonald polynomials, J. Math. Phys. 50 (2009), no. 9, 095215, 42 pp.
- ⑨ T. Kojima and J. Shiraishi, Remark on the integrals of motion associated with level k realization of $U_{qp}(sl_2^{\wedge})$, J. Geom. Symmetry Phys. 14 (2009), 35-49.
- ⑩ Y. Komori, M. Noumi and J. Shiraishi, Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 5 (2009), Paper 054, 40 pp. doi:10.3842/SIGMA.2009.054
- ⑪ T. Kojima and J. Shiraishi, The Integrals of motion for the deformed W algebra $W_{qt}(gl_N^{\wedge})$. II. Proof of the commutation relations, Comm. Math. Phys. 283 (2008), no. 3, 795-851.

[学会発表] (計 9 件)

- ① 栗田英資, B. Feigin, 星野歩, 金井政宏, 白石潤一, 柳田伸太郎, Ding-Iohara代数のprimary場の因子化公式I, 2011年度日本数学会秋季総合分科会, 10月1日, 信州大学
- ② 栗田英資, B. Feigin, 星野歩, 金井政宏, 白石潤一, 柳田伸太郎, Ding-Iohara代数のprimary場の因子化公式II-Pieri係数, Nekrasov因子と梶原のEuler変換, 2011年度日本数学会秋季総合分科会, 10月1日, 信州大学

- ③ 栗田英資, B. Feigin, 星野歩, 金井政宏, 白石潤一, 柳田伸太郎, Ding-Iohara代数のprimary場の因子化公式III, 2011年度日本数学会秋季総合分科会, 10月1日, 信州大学
- ④ J. Shiraishi: "Macdonald polynomials and quantum algebras" 15th Itzykson meeting, New trends in quantum integrability. (2010年6月23日). IPHT Saclay, France
- ⑤ 土谷洋平, 白石潤一, 周期境界 Benjamin-Ono方程式のある拡張について, 2010年度日本数学会秋季総合分科会, 9月24日, 名古屋大学
- ⑥ 土谷洋平, 白石潤一, 周期境界 intermediate ring wave方程式のある拡張について, 2010年度日本数学会秋季総合分科会, 9月24日, 名古屋大学
- ⑦ B. Feigin, 橋爪清史, 星野歩, 白石潤一, 柳田伸太郎, Ding-Iohara代数のレベル0表現とMacdonald差分作用素について, 2010年度日本数学会秋季総合分科会, 9月25日, 名古屋大学
- ⑧ B. Feigin, 橋爪清史, 星野歩, 白石潤一, 柳田伸太郎, Ding-Iohara代数のレベル m 表現と変形 $W(sl_m)$ 代数について, 2010年度日本数学会秋季総合分科会, 9月25日, 名古屋大学
- ⑨ "Macdonald多項式と可積分系" 2008年日本数学会秋季総合分科会特別講演. 2008年9月25日東京工業大学

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :
 番号 :
 出願年月日 :
 国内外の別 :

○取得状況 (計 件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :
 番号 :
 取得年月日 :
 国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

白石 潤一 (SHIRAIISHI JUNICHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20272536

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：