様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月　６日現在

機関番号：１４４０３
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８～２０１０
課題番号：２０５４０２０９
研究課題名（和文）部分環の組に対する相対エントロピーと自己同型写像から生じる不変量
研究課題名（英文）Relative entropy for pairs of subalgebras and invariants arising from automorphisms

研究代表者
長田　まりゑ（CHODA　MARIE）
大阪教育大学・名誉教授
研究者番号：８００３０３７８

研究成果の概要（和文）：作用素環 M の二つの部分環の組 {A, B} に対して、コンヌ・スターマー相対エントロピー の修正版エントロピー である　h(A,B) を導入し、h(A,B) の値を通して、A と B の間の関係を解析した。具体的な例としては、M が行列環、 A, B が共に極大部分環の時の h(A,B) の値を決定し、h(A,B) が最大である為の必要十分条件は、A と B が直交すること等を示した。　これらの結果を、更に、M が連続有限型因子環で、A と B が共に同じ有限指数の部分因子環の場合等にも拡張した。ジョーンズにより、重視されている指数２の部分因子環の場合には、行列環の極大部分環の時の場合に完全に相当する結果が、成立することも示した。

研究成果の概要（英文）：For a pair {A, B} of subalgebra of an operator algebra M, by modifying the Connes-Stormer relative entropy H(A|B), we defined h(A|B), and measured of distance between two algebras. For examples, in the case where M is the matrix algebra with the size n, then { h(A,B) ; A and B are maximal abelian subalgebras M} = [0. log n] and h(A,B) = log n iff A and B are mutually orthogonal. Similar result holds for pairs of subfactor with index 2 of type II_1 factors.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	１，２００，０００	３６０，０００	１，５６０，０００
２００９年度	１，２００，０００	３６０，０００	１，５６０，０００
２０１０年度	９００，０００	２７０，０００	１，１７０，０００
年度			
年度			
総　計	３，３００，０００	９９０，０００	４，２９０，０００

研究分野：作用素環の理論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：作用素環、非可換エントロピー、自己同型写像、

１．研究開始当初の背景
（１）作用素環の自己同型写像の研究は、環の構造解析の作業と深く結びついている。非可換な設定の下での、自己同型写像σ に対する不変量として、コンヌとスターマーによるエントロピー $H(\sigma)$ は、導入された。

（２）最初に現れる最も基本的な非可換作用素環は、n 次複素正方行列全体のなす集合 M_n に代表される I_n 型因子環である。又、

その I_n 型因子環に於いては、自己同型写像 σ は、全て内部自己同型写像である。

（３）内部自己同型写像に対するエントロピーを計算することによって、スターマーは、作用素環のタイプが **I** 型であれば､その環の全ての内部自己同型写像 σ **に対して、**エントロピー $H(\sigma)$ **の値は、常に、**零でなければならない事を、証明した。

（４）上記（２）と（３）の事実は、最も基本的な因子環である M_n に於いては、自己同型写像に対するコンヌとスターマーによるエントロピー $H(\sigma)$ **以外の手段が必要となることを、示唆している事になる。**

（５）一方、環 **M** の自己同型写像 σ のエントロピーを求める為に、最初に行う重要な作業は、**M** の勝手な有限次元部分環 **A** の σ による軌跡の追跡である。その軌跡をエントロピーの理論を通して調べるために、**M** の二つの有限次元部分環 **A** と **B** の組に対する相対エントロピー H(**A** | **B**) の概念が、導入されている。

（６）上記（１）から（５）までの作用素環の理論の枠内での状況とは、全く独立に、数理物理の枠内での動きとして、バイストカステック行列に対して、エントロピーを定義することにより、この種の行列を解析する論文が、現れた。バイストカステック 行列の典型的な例は、ユニタリーから生じるユニストカステック 行列である。

（７）ユニタリー行列 u から導入されるユニストカステック 行列 b(u) は、作用素環的見地からすれば、u が定める内部自己同型写像 I(u) と、密接に関係しており、エントロピー H(b(u)) は、内部自己同型写像 I(u) の情報となり得る可能性があるはずだと、考えた。

２．研究の目的

（１）混沌とした数学的な現象を説明するために、出来れば、簡単な数値を用いて作用素環における部分環の間の相互関係の状況の解析をすることを、目的とした。

（２）その数値を導き出すものとして、当研究に於いて取り上げたのが、エントロピーの概念である。

（３）上記背景の項で記した諸事実と状況を念頭において、与えられた作用素環の、互いに同型な部分環の組に対するエントロピーと、その組に付随する自己同型写像から浮上するエントロピーとの関係を解析することを目的とした。

３．研究の方法

（１）共同研究者との定期的なゼミを通して、各自の研究経過状況報告と、意見交換をした。

（２）海外をも含む作用素環・数理物理の研究仲間と、電子メールで、結果を、知らせあうと共に、研究会等での、成果公表を通して、議論しあうことにより、
より深い結果とする事に努めた。

４．研究成果

当研究に於いては、コンヌとスターマーが導入した作用素環（詳しくは、有限型 フォン・ノイマン環）**M** の部分環 **A** と **B** の組に対する相対エントロピー H(**A** | **B**) の定義を修正することにより、改めて概念 h(**A** | **B**) を定義した。h(**A** | **B**) は、**A** と **B** との間の関係を測る量である。この量 h(**A** | **B**) の基本的性質を調べ上げると共に、その具体的適用例として、下記のような事実も得た：

（１）① 平面幾何において、長さが n の二辺 A と B とが与えられた時に、A と B とがなす菱形の面積を S(A,B) と記す。この時 S(A,B) の値の集合は閉区間 $[0, n^2]$ であり $S(A,B)= n^2$ となる必要十分条件は、二辺 A と B が直交する事である。

② 上記 ①で記した平面幾何学に於ける状況に相当する事実を、作用素環 **M** の部分環 **A** と **B** の組に対する相対エントロピー h(**A** | **B**) に対して証明した。h(**A** | **B**) が、この時、 S(A,B) の役割を果たす。「辺の長さが等しい」に相当するのは、「互いに同型な部分環の組」と置き換えられる。

③ M_n の極大可換部分環 **A** と **B** の組に対して、① に相当する事実が ② で記した考察の下で、成立することを示した。

④ M_n の極大可換部分環 **A** と **B** は、常にユニタリー共役である事から、**B** は、あるユニタリー u を用いて、**B** = u**A** u* と表示することが出来る。③の事実の解析に大きな役割を果たしたのは、このユニタリー u よって導かれる内部自己同型写像のもたらすエントロピー情報であったことに、下記（３）との関係から、注意したい。

（２） 相対エントロピー H(**A**｜**B**）の修正版である h(**A**｜**B**） を導入した理由は、上記（１）における事実が、H(**A**｜**B**）では、成立しなかったためである。

（３） M_n の極大可換部分環 **A** と **B** の組を、互いに同型な部分因子環 **A** と **B** の組に置き変えて、（１）の結果に相当する考察を、行った。

① この場合、やはり、適切なユニタリー u 存在して、**B** = u**A** u* の型式で、表示することが可能である。u(A, B）でこのユニタリー u を記す。

② このユニタリー u(A, B）を部分因子環 A との関係から、テンソル積分解することにより密度行列を校正する方法を確立した。

③ その結果（１）の ④ で記したエントロピー的情報を、この密度行列から生じるエントロピーに置き換えることにより、次の結果を証明することが、出来た：

「M_n の互いに同型な二つの部分因子環の組 **A** と **B** とが、互いに直交するする事は、上記ユニタリーu(A, B）から導かれる密度行列に関するエントロピーが、最大値をとることに相当する。その最大値とは、2 log n である」。

④ このような部分因子環の組の解析は、情報理論に於ける M_n の状態の解析の為に、多くの研究が、なされているが、研究代表者が行ったようなエントロピー的解析からは、今まで、研究されていない。

(4) I 型環の次に現れる基本的な環は、II_1 型因子環と呼ばれる。II_1型因子環 **M** の部分因子環の内で、Jones の指数理論により、最初に取り上げられるのは、**M** の外部自己同型写像のなす有限群 G による固定点環として現れる部分因子環 **N** であり、特に |G| = 2 の場合の部分因子環全体は、完全に分類されている。因子環 **M** と部分因子環 **N** との、このような包含関係の状況は **M** が **N** の G による接合積の状況に相当する。

① 上記の設定の下で、先ず、次の関係式が、**M** の全ての内部自己同型写像 σ に対して成立する：

$$h(N \mid \sigma(N)) \leqq \log(|G|).$$

ただし、 |G| は群 G の濃度を表わす。

② 特に、|G| = 2 の場合には、（１）の ① で記した事柄に相当する事実が成立する。更に、σ が M の内部自己同型写像を動いたときの h(**N**｜σ（N））全体の集合は、閉区間 [０, log２] であり、h(**N**｜σ（N））が最大値 log２ の値を取るための必要十分要件は、二つの部分環の直交条件の拡張概念の、commuting square 条件を満たすことだとの結論を得た。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９ 件）

① Marie Choda Conjugate Pairs of Subfactors and Entropy for Automorphisms, International Journal of Mathematics、査読有、22 巻、2011、577-592.

②長田 まりゑ、Entropy via partitions of unity、京都大学数理解析研究所講究録、査読無， 印刷中。

③長田 まりゑ、直交する場合、そして、その場合にのみ、最大になる値, 国際数理科学協会会報、査読無, 73 巻、2011、2-14。

④ Marie Choda, Entropy for a Pair of Subalgebras via Automorphisms, Bull. Malays. Math. Sci. Soc.、査読有、33 巻、 2010, 369-384.

⑤ Rui Okayasu, Entropy for C*-algebras with tracial rank zero, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no.10, 3609--3621

⑥ Rui Okayasu, Relative entropy for abelian subalgebras, Internat J. Math. 21 (2010), no.4, 537--550.

⑦ Marie Choda, Relative Entropy for Conjugate Pairs of Subalgebras 、Proceedings of the workshop on Operator Theory and Operator Algebras, 査読無, 2009, 66-75..

⑧ Marie Choda, Relative entropy for maximal abelian subalgebras of matrices and the entropy of unistochastic matrices, International Journal of Mathematics, 査読有、19 巻、2008, 767-776.

⑨Masaki Izumi, Sergey Nesyaveyev, Rui Okayasu, The ratio set of the harmonic measure of a random walk on a hyperbolic group, Israel J. Math., 査読有、163 巻、2008, 285-316.

〔学会発表〕(計 １５ 件)

① Rui Okayasu, "Tracial topological approximation entropy", Weekly seminar, 2011 年２月, Centre de Recerca Matematica (Spain),

② 岡安 類、" On the Toeplitz algebras of quasi-lattice ordered groups", 2011 年１月、研究集会「作用素環の対称性の研究」、京都大学数理解析研究所

③Marie Choda、 ″Entropy via partitions of unity″、RIMS 研究集会: 独立性と従属性の数理 - 函数解析学の視点から-、12 月 22 日、２０１０年. 京都大学数理解析研究所

④ 岡安類、 Tracial topological approximation entropy、11 月 15日、２０１０年、作用素論・作用素環論研究集会、東京理科大学森戸記念館.

⑤長田 まりゑ、「どこを問題にして、違いを表す数値を導き出すか」, 公開講座 、11 月 13 日、２０１０年、賢明女子学園中学・高等学部, 姫路市.

⑥ Marie Choda 、 ″Positive definite matrices arising from unitaries ″, 13th WORKSHOP: NON-COMMUTATIVE HARMONIC ANALYSIS WITH APPLICATIONS TO PROBABILITY, July 14, 2010、Bedlewo, Poland。

⑦Marie Choda、 ″Unitary operators and pairs of subalgebras ″, 2010 KOTAC International Conference: Operator Theory and Its Applications, June 17,2010. University of Incheon, Korea,

⑧ Marie Choda 、「Relative Entropy for Conjugate Pairs of Subalgebras」, 「作用素論・作用素環論」研究集会, 奈良教育大学、１１月１９日、２００９.

⑨ Marie Choda 、「 Entropy for inner conjugacy class of subalgebras」、The 9th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability、東北大学、September 11、2009.

⑩Marie Choda、「二つの部分環の間の隔たりを測る量について」, 「関数解析学の研究とその応用」研究集会, , ８月２８日、 ２００９年、クロスパル新潟。

⑪Marie Choda、 ″Fourier expansions and inner conjugacy class of subfactors″, 12th WORKSHOP: NON-COMMUTATIVE HARMONIC ANALYSIS WITH APPLICATIONS TO PROBABILITY, Bedlewo, Poland, August 18, 2009,

⑫Marie Choda、 ″Entropy for a pair of subalgebras arising from automorphisms″、Operator Algebra Special Session AMC-2009, June 24, 2009, PWTC Kuala Lumpur Malaysia.

⑬岡安 類、"Relative entropy for finite dimensional abelian subalgebras" 日本数学会函数解析学分科会, 2008 年９月、東京工業大学。

⑭Marie Choda ″Entropy on matrix algebras″, ESI Seminar, The Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, September 3, 2008.

⑮ Marie Choda, ″Entropies for two subalgebras of operator algebras″ Information and Communication Conference August 27, 2008, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary、

〔その他〕

（１）長田 まりゑ 書評「数学者列伝{¥bf II}」I. ジェイムズ著、蟹江幸博 訳（シュプリンガー・ジャパン社、２００７年）数学通信、 日本数学会編集・出版、第１３巻、第４号、２００９年２月、91--93,

（２）長田 まりゑ 書評 S. Neshyveyev and E. Stomer 著: Dynamical entropy in Operator Algebras, Ergeb. Math. Grengeb. (3), 50, Springer, 2006 年, x+296 ページ、数学、 日本数学会編集、岩波書店出版、第６１巻、第３号、２００９年７月、330--334,

６．研究組織

(1)研究代表者

長田 まりゑ (CHODA MARIE)

大阪教育大学・名誉教授

研究者番号：８００３０３７８

(2)研究分担者

岡安 類 (OKAYASU RUI)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：７０３６２７４６