

機関番号：16301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540210

研究課題名（和文）非線形放物型方程式の自己相似性と解の特異性

研究課題名（英文）

Self-similarity and singularity of solutions for nonlinear parabolic PDEs

研究代表者

内藤 雄基 (NAITO YUKI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10231458

研究成果の概要（和文）：非線形放物型偏微分方程式に対して、自己相似解の解構造を解明すると共に、時間大域解の漸近挙動における自己相似解の役割について研究を行った。とくに非線形項の指数が Sobolev の埋め込みの意味で臨界的な場合の非線形放物型方程式の自己相似解の構造について新たな結果が得られた。さらに走化性方程式系に関わる非線形問題への応用について研究を行った。

研究成果の概要（英文）：The structure of self-similar solutions for semilinear heat equations is studied, and the role of self-similar solutions in the problem of asymptotic behavior of time-global solutions is investigated. In particular, new results on the structure of self-similar solutions for semilinear heat equations with Sobolev critical nonlinearity are obtained. Furthermore, the applications to the nonlinear problem involving chemotaxis system are studied.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形偏微分方程式、自己相似性、解の爆発、特異性、定常問題

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形熱方程式においては、有限時刻において解の値が無限大に達し、その時刻を越えて延長できないという爆発と呼ばれる状況が現れることが知られている。そのような爆発現象の研究においては「爆発は起こるか」、爆発が起こるとすると「いつ」「どこで」「どのように」といったことが基本的な問題として研究がされている。

(2) 非線形方程式における解の有限時刻での爆発現象あるいは集中現象などの特異性の

発現の背後に、自己相似性というスケール不変性がしばしば見られる。この自己相似性は、非線形方程式の解の特異性を考察する上で重要な働きをすることが知られている。しかしながら爆発項をもつ非線形熱方程式においては十分な研究はなされていない。

## 2. 研究の目的

非線形放物型偏微分方程式に対して、自己相似性という観点から解の特異性についての考察を行う。とくに自己相似解の解構造を解明すると共に、時間大域解の漸近挙

動における自己相似解の役割、特異性をもつ解と自己相似解との関連を考察する。これらの考察により、解の爆発現象に対する変分的特徴付け、スケーリングによる考察、特異時間大域解の構成、走化性方程式系およびその他の非線形問題への応用について研究を行う。

### 3. 研究の方法

(1) 非線形熱方程式の自己相似解の解構造を解明すると共に、時間大域解の漸近挙動における自己相似解の役割、特異性をもつ解と自己相似解との関連を考察する。

(2) (1) に関連する非線形定常問題に対して、変分的アプローチおよび常微分的アプローチ等により、その解構造に関する研究を行う。

(3) 非線形熱方程式における研究で得られた結果・手法を走化性方程式系およびその他の非線形問題に対して応用を行う。

### 4. 研究成果

(1) 非線形項の指数が Sobolev の埋め込みの意味で臨界的な場合の非線形放物型方程式に対する自己相似解の構造について考察を行った。非線形楕円型偏微分方程式に対する変分的手法を用いることにより空間次元に依存して正值解の解構造が変化することを明らかにした。

(2) 走化性方程式系における後方自己相似解および前方自己相似解の構造とその時間大域解および有限時刻爆発解における役割について考察を行った。空間2次元の前方自己相似解については、球対称性と無限遠方での減衰条件を仮定することにより単独スカラーの問題に帰着することができ、詳細な解の構造を明らかにすることができた。さらに十分小さな初期値から出発する解は、時間の経過とともに先に述べた自己相似解に漸近することを示すことができ、それにより解の長時間挙動を明らかにすることができた。

(3) 1次元  $p$ -ラプラス微分作用素をもつ2点境界値問題に対して、符号変化する解が存在するための精密な十分条件を与えることができた。

(4) 1次元  $p$ -ラプラス微分作用素をもつ2点境界値問題に対して、非線形項の増大度が原点の近傍と無限遠方において同じオーダーの挙動をもつ場合の解構造について考察を行った。非線形項の増大度が原点の近傍と無限遠方で異なる場合には、線形化固有値との関係によって解の存在・非存在が決定されることが知られているが、増大度が等しい場合には、符号変化する解について、少なくとも2つの解が存在するか、あるいは解が存在しない、という異なる解構造をもつことが明らかになった。

(5) 粘菌の集中現象を記述するために導出された Keller-Segel 系については、空間3次元以上においては自己相似的な集中現象およ

び Burgers 的な移流を伴う集中現象が見られることが知られている。ここでは、空間次元3次元以上9次元以下において後ろ向き自己相似解の解構造について考察を行い、それらの詳細な漸近的性質を明らかにすることができた。とくに加算無限個の自己相似解が存在し、それらは特異定常解との交点数により特徴付けることができること、原点を除いた適当な部分で特異定常解に漸近することが明らかとなった。

(6) 非線形項が Sobolev の埋め込みの意味で臨界的な増大指数をもつ非線形楕円型偏微分方程式の正值解の構造について考察を行った。分岐理論、比較定理による優解・劣解の方法により最小解の存在を示した。とくにパラメータに関して単調な最小解の存在を示すと同時に、それら最小解属の極値解 (extremal solution) の存在および正則性についても考察を行った。さらに Sobolev 臨界指数増大度をもつ非同次定常問題の非最小解の存在・非存在について考察を行った。とくに非最小解と最小解の差を考えることにより解の多重性に関する考察を行った。適当な汎関数に対して変分的手法を用いることと Pohozaev 型の恒等式を用いることにより、非線形項が Sobolev 臨界指数増大度をもつ場合には、正值解の解構造が本質的に空間次元に依存することを明らかにした。とくに空間次元 3, 4, 5 と 6 以上において解の多重性が変化することを示すことができた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

[1] Yuki Naito, Satoshi Tanaka, Sharp conditions for the existence of sign-changing solutions to equations involving the one-dimensional  $p$ -Laplacian, *Nonlinear Anal. TMA*, 69 (2008) p. 3070-3083 査読有り

[2] Yuki Naito, Self-similar solutions for a semilinear heat equation with critical Sobolev exponent, *Indiana Univ. Math. J.* 57 (2008) p. 1283--1315 査読有り

[3] Yuki Naito, Takashi Suzuki, Self-Similarity in Chemotaxis Systems, *Colloq. Math.* 111 (2008) p. 11--34 (査読有り)

[4] Yuki Naito, Takasi Senba, Self-similar blow-up for a chemotaxis system in higher dimensional domains, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B15* (2009) 87--99 (査読有り)

[5] M. Kuwamura, T. Nakazawa, T. Ogawa, A minimum model of prey-predator system with dormancy of predators and the paradox of

enrichment, J. Math. Biol. 58 (2009) 459--479 (査読有り)

[6] M. Kuwamura, H. Chiba, Mixed-mode oscillations and chaos in a prey-predator system with dormancy of predators, Chaos 19(43121) (2009) 1--10 (査読有り)

[7] Y. Naito, T. Sato, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, RIMS Kokyuroku 1671 (2009) p. 91--95 (査読なし)

[8] M. Kuwamura, K. Maeda and T. Adachi-Yamada, Mathematical modelling and experiments for the proliferation and differentiation of Drosophila intestinal stem cells I, J. Biol. Dyns. 42 (2010) 248-257 (査読有り)

[9] Yuki Naito, Existence and non-existence of sign-changing solutions for a class of two-point boundary value problems involving one-dimensional p-Laplacian, Mathematica Bohemia (2011) to appear (査読有り)

[10] Yuki Naito, Tokushi Sato, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. Mat. Pura Appl. (2011) to appear (査読有り)

[学会発表] (計 18 件)

[1] Yuki Naito, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, International Conference on Nonlinear PDE and Applications, 2008 年 6 月 11 日, Pusan National University, Pusan, Korea

[2] Yuki Naito, Threshold solutions for a semilinear heat equation with Sobolev critical exponent, Third Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2008 年 9 月 12 日 東北大学

[3] Yuki Naito, Self-similar blowup for a chemotaxis system in higher dimensional domains, Mathematical Analysis on the self-organization and the self-similarity, 2008 年 9 月 17 日 京都大学数理解析研究所

[4] Yuki Naito, A variational approach for self-similar solutions to a nonlinear heat equation with critical Sobolev exponent, 熊本における偏微分方程式研究集会, 2008 年 10 月 24 日 熊本大学

[5] Yuki Naito, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, 仙台楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2008 年 11 月 8 日 東北大学

[6] Yuki Naito, Self-similar blowup for a chemotaxis system, 09 International

Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2009 年 6 月 29 日 Pusan National University, Pusan, Korea

[7] 内藤雄基, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, 京都大学数理解析研究所研究集会「変分問題とその周辺」, 2009 年 6 月 9 日 京都大学数理解析研究所

[8] Yuki Naito, Blowup rate for a parabolic-elliptic system in higher dimensional domains, Equadiff 12 (2009), 2009 年 7 月 21 日 Brno, Czech Republic

[9] 仙葉隆、内藤雄基, 高次元領域における走化性方程式系の解の自己相似爆発, 日本数学会函数方程式分科会, 2009 年 9 月 26 日 大阪大学

[10] Yuki Naito, A variational approach for self-similar solutions to nonlinear heat equations, POSTEC Analysis seminar, 2009 年 10 月 24 日 POSTEC, Pohang, Korea

[11] 内藤雄基, Critical phenomena in linear elliptic problem with Hardy potential, 京都大学数理解析研究所研究集会「現象解析と関数方程式の新展望」, 2009 年 11 月 18 日 京都大学数理解析研究所

[12] Yuki Naito, Asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for a semilinear heat equation, Nonlinear PDE seminar (Pusan University) 2010 年 8 月 30 日 Pusan, Korea

[13] Yuki Naito, The role of self-similarity in the Cauchy problems for semilinear heat equations, The 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2010 年 9 月 9 日, Lotentz Center, ライデン、オランダ

[14] 佐藤得志、内藤雄基, 臨界 Sobolev 指数をもつ非線形半楕円型偏微分方程式, 日本数学会 2010 年度秋期総合分科会, 2010 年 9 月 24 日 名古屋大学

[15] Yuki Naito, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, 首都大・変分問題セミナー, 2011 年 1 月 14 日 首都大学東京

[16] 石井克幸, A time discretization to the American option pricing, Nonlinear PDE seminar, 2010 年 4 月 14 日, Sapienza Univ. Roma、イタリア

[17] 石井克幸, A time discretization to the American option pricing, Nonlinear PDE seminar, 2010 年 4 月 15 日, Federica II Univ. Napoli、イタリア

[18] 桑村雅隆, 仲澤剛史, Dormancy of predators dependent on the rate of variation in the prey density, 第 20 回日

本数理生物学会大会, 2010 年 9 月 15 日、  
北海道大学

〔図書〕 (計 1 件)

[1] 石井 克幸, 「現代数学はいかに使われているか [解析編]」, 画像処理と曲率流方程式, 数理科学 2008 年 4 月号特集, サイエンス社

〔産業財産権〕 なし

〔その他〕

ホームページ

<http://continuum.math.sci.ehime-u.ac.jp/~ynaito/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

内藤雄基 (Yuki Naito)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号: 10231458

### (2) 研究分担者

石井克幸 (Katsuyuki Ishii)

神戸大学・海事科学研究科・准教授

研究者番号: 40232227

桑村雅隆 (Masataka Kuwamura)

神戸大学・人間発達環境学研究科・准教授

研究者番号: 30270333

### (3) 連携研究者

鈴木貴 (Takashi Suzuki)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号: 40114516

仙葉隆 (Takasi Senba)

九州工業大学・工学研究科・教授

研究者番号: 30196985

石毛和弘 (Kazuhiro Ishige)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号 9027020