様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月１６日現在

機関番号：15401
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540212
研究課題名（和文）非一様場における反応拡散ダイナミクス

研究課題名（英文）Reaction Diffusion Dynamics in non-homogeneous media

研究代表者
坂元　国望（SAKAMOTO KUNIMOCHI）
広島大学･大学院理学研究科･教授
研究者番号：40243547

研究成果の概要（和文）：結合振動子の位相分布を記述する Fokker-Planck 方程式を非対称な自然振動数分布の下で考察し、自明分布からの分岐が Hopf 分岐であることを示した。領域境界と交わる界面を有する定常解の安定性が、その境界部分における曲率と Laplace 作用素に関するこの領域の Steklov 固有値の大小関係で判定できることを示した。微分非線形シュレディンガー方程式の周期進行波解の大域分岐構造を明らかにし、安定な枝を決定した。３成分反応拡散系における Turing 不安定化の理論的な基礎を構築した。安定な系における不安定な部分系の存在と不安定部分系の相対的拡散係数が小さいことが Turing 不安定化の本質であることを示し､部分系の不安定性のタイプによって２種類の不安定モードが出現することを示した.

研究成果の概要（英文）：Fokker-Planck equations that describe the evolution of phase distributions in coupled oscillators were treated under an asymmetric natural frequency distribution. We found that the destabilization of the trivial distribution is of Hopf bifurcation type. The stability of layered solutions in reaction-diffusion equations was investigated, when the interface of the layered solution intersects the boundary of the domain. The stability is determined by the relative order between the curvature of the intersecting region and the Steklov eigenvalues of the Laplacian. A theoretical foundation of the Turing instability in 3-component reaction diffusion systems was established. The essence of the Turing instability lies in the existence of unstable subsystems within a stable full system and that the diffusion rates of unstable subsystems are relatively small compared with those of the complimentary subsystems. Two types of Turing instability were identified, according to types of instability of unstable subsystems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	**900,000**	**270,000**	**1,170,000**
2009 年度	**900,000**	**270,000**	**1,170,000**
2010 年度	**600,000**	**180,000**	**780,000**
年度			
年度			
総　計	**2,400,000**	**720,000**	**3,120,000**

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：パターンダイナミクス、反応拡散系、曲率、固有値、安定性、対称性

１．研究開始当初の背景
非線形偏微分方程式の解が織りなすパターンダイナミクスは、ユークリッド空間等の一様な場において研究されてきた。しかし、一

様場においても、空間領域の境界曲率の非一様性がパターンダイナミクスに何らかの影響を与えるとの認識は多くの研究者によって共有されていた。このことから、空間計量や拡散・反応場の非一様性や非対称性などがパターンダイナミクスに及ぼす影響を統一的な視点から研究する必要性が強く感じられ、反応拡散系や非線形分散系における非一様性の効果を精査することを着想した。

２．研究の目的

反応過程・空間計量・拡散効果・非対称性が、非線形放物型方程式や非線形分散型方程式の解ダイナミクスどのような影響をあたえるのかを、力学系的な視点から研究すること、とくに、反応拡散方程式の特異摂動解、非線保存系、非線形シュレデインガー方程式について考察する。具体的には，これらの方程式について、定常解の存在・安定性、定常解からの分岐現象、解の大域的な構造の解明を目指す。

３．研究の方法

研究形態は、同分野の研究者との研究討論、大学院生とのセミナー、研究集会での研究経過発表および参加者との討論を通して行った。

まず、拡散の非一様性と空間計量の関係を調べるために、多様体上の微分幾何的な考察を行った。これは、おもに文献を基にしたものになった。微分幾何学の専門家との討議も最初は行ったが、問題意識の共有が困難なため、あまり望ましい進展がなかった為である。

次に、結合振動子系の位相分布密度が満たす非線形保存則（Fokker-Planck 方程式）における定常解の存在とその安定性および分岐解の出現については、大学院生とのセミナーを通して行った。用いた手法は、分岐理論と摂動展開であった。

次に、微分非線形シュレデインガー方程式については、この方程式を適当なヒルベルト空間における無限次元ハミルトニアン方程式として定式化し、Grillakis-Shatah-Strauss によって確立された安定性判定条件を適用することを試みた。周期進行波解の存在は、Ginzburg-Landau 方程式や Newell-Whitehead 方程式の平面波解を参考にして、直接初等的な方法によって示した。分岐解析には、同変分岐理論（方程式の対称性を組み込んだ分岐理論）を用いて行った。

次に、特異摂動型反応拡散方程式の遷移層解については、界面方程式の線形化とその境界曲率との関係を特異摂動展開によって決定し、線形化固有値問題が Steklov 問題の固有値と関係することを用いた。

次に、３変数反応拡散系における Turing 不安定性については、安定な線形化反応行列に拡散行列の定数倍を加えたものを考え、不安定化モードを決定するために Routh-Hurwitz 判定法の否定命題を適用して解決した。

４．研究成果

リーマン多様体上の拡散方程式を同じ多様体上の別の計量に関する非一様拡散方程式として表されるための必要十分条件は、元の計量と新たな計量の determinant の比が多様体上で定数であることを示した。この条件が満たされていない場合は、もとの拡散方程式は、新たなリーマン計量のもとでの非一様拡散方程式に移流効果が加わったものとなる。このことから、一つの多様体上の計量テンソル全体に計量の determinant の比が定数であるという同値関係を導入し、この同値関係によって計量テンソル空間がどのように分割されるかという新たな問題を見いだした。この問題の重要性については、幾何学を専門とする研究者と共通の認識をもつことができなかった。

結合振動子の位相分布密度函数が満たす Fokker-Planck 方程式において、一様分布解からの分岐現象を、振動子系の自然周波数が bimodal かつ非対称な場合に考察した。自然振動数分布の非対称性と非線形性の協同によって、分岐はかならず Hopf 分岐となることを見いだした。従来の対称な自然振動数数分布ではかならず定常分岐であることがしられていたが、その結果とは対照的な結果が得られた。また、非対称性により一様分布解がより不安定化し易いこともわかった。さらに、非対称性の影響で分岐解の枝の構造が大きく変形することが見いだされ、解構造の多様性を示唆する結果として当該分野の専門家から注目を浴びた。これは、分岐理論の立場からは、系の非対称性による分岐の不完全化（imperfection）現象とも見られるが、定常分岐から Hopf 分岐への imperfection 現象という意味で、非常に興味深い研究方向だとして認知されたものと思われる。また、自然振動数分布が対称な場合に限って、定常解の分岐解がノイズなし極限において特異極限に収束することを証明した。このことから、ノイズ無し極限におけるダイナミクスはノイズありの特異極限として捉えることは一般に不可能であり、ノイズなし極限そのものを新たなアイデアと手法を用いて研究する必要があることが判明した。

領域境界の曲率が非一様な場合において、特異摂動型反応拡散方程式の定常解の存在や安定定常解（パターン）が存在するための十分条件を、領域境界の幾何学的な情報と Steklov 固有値との関係を用いて与え、定常解を特徴付ける界面と領域境界が交差する部分の横断的法曲率の非一様性が定常解の存在と安定性の鍵であることを明らかにした。最も単純な状況においては、この交差部分に境界上で直交する方向への法曲率が交差部分においてその近傍における臨界値と

なっていることと、この法曲率と Laplace 作用素に関する Steklov 固有値の大小関係によって、定常解の存在と安定性が決定されることになる。領域境界の曲率の非一様性が起因となってダイナミクスが複雑化する傍証を与える結果となった。特に、法曲率が正（領域内部から見て境界が外側に凸となっていること）の場合、領域境界を適当に変形すると一つの定常解から無限回の分岐がおこることを示した。これらのことは、「非一様場」の概念は見かけによって決定されるのではなく、系の内在的な挙動と構造を分析して初めて判断されなければならないことを示唆するものである。

プラズマの電磁流体モデルから逓減摂動法によって導出され、微分非線形シュレデインガー方程式と呼ばれる、非線形分散型偏微分方程式を空間１次元周期境界条件下で考察した。進行周期波解の存在と安定性を、まずキャリアー波の振動数が０の場合に研究し、全ての０以外の整数を回転数とする半自明解の枝が、進行速度が回転数を上回る範囲において存在することを示した。正の回転数を持つ波は、進行速度が回転数に応じて十分大きければ軌道安定であることを、無限次元ハミルトニアンン系におけるグリラキス・シャター・シュトラウスの判定条件を適用して示した。この判定法で安定性が決定できない部分に対しては、同変分岐理論を用いて進行周期波の２次分岐が起こっていることを示し、その回転数と共に振幅変動数を決定することができた。また、この２次分岐のおこる回数は、正の回転数の枝では分岐は有限回（回転数マイナス１回）おこり、負の回転数の枝では無限界おこること、さらに進行周期波をサブハーモニックなものに拡張すれば、全ての枝で分岐は無限回おこり分岐点は稠密な集合をなすことを示した。次に、キャリアーウエーブの振動数が０でない場合を考察し、上記と同様な解析を行い分岐解の大域構造を明らかにした。このとき、キャリアーウエーブの振動数がある範囲にあるとき、負の回転数をもつ全ての枝において、異常な分岐現象を見いだした。通常、安定な自明解から亜臨界的に非自明解が分岐する場合、分岐解は不安定になるのだが、キャリアーウエーブがある範囲にあるときに限り，亜臨界的に分岐した非自明解も安定になる現象を見いだした。今回見いだした異常なタイプの分岐現象は、非線形散逸系においては決して現れない。しかし、微分非線形シュレデインガー方程式のような非線形分散型方程式においては、どのような波数の波がどの方向に伝播するかに依って、キャリアーウエーブの振動数によっては媒質の振動数が柔軟に変化してあたかも非一様媒質のように振る舞い、ある種の共鳴現象を起こすことに依って、異常な分岐が起こると推測されるが、その詳細なメカニズムは現時点では全く不明である。国内外の著名な研究者とこの点について幾多の議論を重ねたが、いまだ決定的な説明は出ていない。今後の重要な研究課題である。

３変数反応拡散系における Turing 不安定性の数学的なメカニズムの本質的な因子を決定した。これは、2 変数系の Turing 不安定性の拡張であると共にその本質に別の視点から光を当て、従来とは異なるシナリオを提供している。即ち、反応系として安定な３変数系に拡散効果が付加された場合、安定-不安定の相補的部分系のペアが存在すれば、不安定部分系の拡散が安定部分系の拡散よりも十分弱いならば、必ず Turing 不安定性が誘導されるのである。このことから、2 変数系において Turing 不安定性を起こす線形反応行列の形が必然的に決定されるのである。さらに、3 変数系においては、２変数系では決して現れないタイプの Turing 不安定モードが出現する。すなわち、定常モードの不安定化だけではなく、空間非一様で時間周期的なモード（Turing-Hopf モード）の不安定化が起こるのである。この Turing-Hopf モードの不安定化は不安定部分系が２変数部分系でありそのトレースが正の場合に対応して出現することを示した。さらに一般に、２変数部分系の不安定性を通有的な状況で３つのタイプに分類し、それぞれのタイプの部分系に対応して Turing 不安定かのモードとタイプが決定されることを示した。また、一つの安定な系には複数の安定-不安定ペアが存在し、それら異なるペアに対応する Turing 不安定化が相互作用をおこし、複雑な分岐現象が観察されることを示した。３変数系においては、さらに、不安定-不安定の相補的ペアも全体として安定系を構成することが可能であり、このようなペアについても、不安定な部分系それぞれに対応する Turing 不安定化が起こることを示した。この不安定-不安定ペアは２変数系においては原理的に決して起こり得ない場合であり、３変数系に特徴的な現象である。以上の結果と考察から、４変数以上の系における Turing 不安定性の研究指針が示唆されると共に、３変数以上の系においては成分数が増えるに従って、Turing 不安定性の様相は予想以上に急激に複雑化していくことが予見される。すなわち、部分系の持つ複雑性が相乗的に現れ、変数が一つ増えるごとに新たなタイプの不安定化が出現すると思われる。現在まで、散発的に行われてきた３変数系におけるパターンダイナミクスの研究に、パターンの出現の有り様に関する一つの新しい視点を提供する成果だと思われる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計９件）
1. Sakamoto Kunimochi, Turing instability for three-component systems, NCTS Workshop on PDE models for Biological Processes, Dec. 16, 2010, Tsing-Hua University （新竹市、台湾）
2. Sakamoto Kunimochi, Stability and Bifurcation of Rotating Waves in Nonlinear Equations, June 17, 2010, The 4-th International Conference on Recent Advances in Applied Dynamical Systems, Zhejian Normal University（金華市、中華人民共和国）
3. Sakamoto Kunimochi, Diffusion systems with interacting flux on the boundary, May 27, 2010, 8-th AIMS International conference on Dynaimcal Systems, Differential Equations and Applications, Dresden University of Technology（Dresden,ドイツ連邦共和国）
4. Sakamoto Kunimochi, Stability and Bifurcation of Periodic waves in a dispersive system, 日韓協同研究集会（ダイナミカルシステムとその周辺）March 4, 2010, 釜山大学（釜山、韓国）
5. Sakamoto Kunimochi, Stability and bifurcation of Periodic Waves in nonlinear equations, RIMS研究集会、2010年１月14日、埼玉大学
6. Sakamoto Kunimochi, Stability and Bifurcation of Periodic Waves in a Hamiltonian PDE, 国際研究集会 SNP2009,Nov. 2, 2009, 関西セミナーハウス（京都市）
7. Sakamoto Kunimochi, Stability and bifurcation of periodic travelling waves in derivative nonlinear Schroedinger equations, 2nd International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, July 14, 2009, Providence University（沙鹿市、台湾）
8. Sakamoto Kunimochi, 蔵本モデルの定常解 – 振動数分布の非対称性と特異摂動の観点から - ,京都大学結合系セミナー、2009年3月18日（京都大学）
9. Sakamoto Kunimochi, 蔵本モデルにおける特異摂動問題,盛岡応用数学小研究集会, 2008年12月14日（岩手大学）

６．研究組織
(1)研究代表者
坂元　国望　（Sakamoto Kunimochi）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40243547

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：