様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　３　月　３１　日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2011
課題番号：20540213
研究課題名（和文）　自由確率論と作用素環論の研究

研究課題名（英文）　Study on free probability and operator algebras

研究代表者
植田　好道（UEDA YOSHIMICHI）
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：００３１４７２４

研究成果の概要（和文）：
自由確率論を背景とした作用素環の研究を行った．具体的には次のような成果を得た：(1) フォンノイマン環の自由積が因子環になるための必要かつ十分条件を与えた．より強く中心分解を完全に記述し I 型部分の詳細な記述を与え，非 I 型部分は必ず現れそれはいつでも II_1 or III 型因子環でありその型の決定の具体的なアルゴリズムを与えた．さらに非 I 型部分がいつでも完全因子環であることも証明した．(2) フォンノイマン環の自由積の非 I 型部分として現れる III_1 型因子環の Sd 不変量と τ 不変量を決定した． (3) 非可換有界ハーディー空間の前共役を研究し，前共役内の弱コンパクト集合に対して成立する極めて特徴的な性質を証明した．(4)フォンノイマン環の融合積に対して因子性と型の決定および完全性に関する研究を行い，いくつかの部分結果を得た．

研究成果の概要（英文）：
I studied operator algebras and related topics in relation to free probability theory. More precisely, I obtained the following results: (1) I gave a necessary and sufficient condition for an arbitrary free product von Neumann algebra to be a factor. More strongly, I described its central decomposition explicitly, gave an explicit description of the type I part, proved that the non-type I part always appears and becomes a type II_1 or III factor, and gave an explicit algorithm for determining the type of that factor. Moreover I proved that that factor is always full. (2) I computed the Sd- and τ-invariants of any type III_1 factor arising as the non-type I part of a free product von Neumann algebra. (3) I proved a very special property for weakly compact subsets in the preduals of non-commutative bounded Hardy spaces. (4) I studied the questions of factoriality, type classification and fullness for amalgamated free product von Neumann algebras, and gave several partial answers to those questions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：作用素環論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：作用素環論，自由確率論，非可換調和解析

１．研究開始当初の背景

研究代表者は作用素環の自由積・融合積の研究から出発し，それをコンパクト量子群の作用の構成問題に応用したり，自由積・融合積の一般的性質を調べたり，さらには自由確率論の手法を用いて自由群因子環の部分因子環を研究することを当初行っていた．その後，自由確率論自体の問題，特に自由エントロピーに関わる種々の確率論的不等式や相互情報量の自由確率論類似をランダム行列の手法を交えて研究した．また同時に，離散群論において融合積の仲間として知られる HNN 拡大の作用素環類似を初めて導入しその研究の端緒を開いた．さらに，非可換有界ハーディー空間の前共役のバナッハ空間論的解析に着手していた．

２．研究の目的

項目１で述べた研究の流れを踏まえ，より広い観点から作用素環論，自由確率論を眺め，これまでの研究を踏まえてさらなる新境地を切り開くのが研究の大きな目標であった．

３．研究の方法

これまでの研究と同様に複数の研究テーマを同時に走らせる方法により行った．これはともすれば，全て失敗しかねない方法ではあるが新境地を狙う以上，失敗の危険性が避けられないため仕方がない．

４．研究成果

当初のもくろみは大きく外れ純粋に自由確率論の問題の深化の試みは完成しなかった．しかしながら，自由確率論に関わる思わぬ方向で意味ある成果が得られた．それを中心にいくつかの成果について詳述する．

フォンノイマン環の自由積の一般的性質の解明に完全に成功した．[1],[2]．なお，自由積は自由確率論の基礎をなす構成法であることに注意されたい．すなわち，自由積は通常の確率論における（無限）直積確率空間の自由確率論類似である．確率空間の場合，意味あるものはすべて確率空間としては同じになることが知られているが自由積ではこんなことは期待できない．フォンノイマン環は von Neumann により導入され，その理論的基礎は（冨田竹崎理論を除き）von Neumann と Murray の連作により確立したと言って過言ではない．彼らが提案したフォンノイマン環の解析法は次のようである．一般のフォンノイマン環は因子環と呼ばれる中心が１次元のフォンノイマン環の直積分（＝連続直和）になっている（これを中心分解と呼ぶ）．因子環はそのなかの射影の次元の様子を見ることにより I, II_1, II_∞, III 型に分類できる．さらに，I 型因子環は完全に分類されている．I 型以外の様子は大変複雑でよくわからない. 特に III 型はトレイスを持たないので全く手がかり無し．以上が Murray-von Neumann の得た一般論であった．以上のことを踏まえると，具体的に与えられたフォンノイマン環を理解するには，Murray-von Neumann が確立した基礎理論に立脚する限り，因子環か否かの判定基準，さらには中心分解の記述が最初にやるべき問題である．しかしながら，フォンノイマン環の一般的構成法についてこれらのことをするのは（いくつかの自明な場合を除いて）まったく容易くない．例えばフォンノイマン環の基礎構成法の１つである接合積に対して一般にこれらのことをするのはほぼ不可能と言える．もちろん，応用上十分なことは既に確立しているが．またテンソル積については既に完全にわかっているが，因子環判定基準は富田理論で初めて完全解答が与えられたように苦渋の歴史がある．今回，私はフォンノイマン環の自由積に対してこれらのことに対する完全解答を与えた．具体的には，勝手に与えられたフォンノイマン環の自由積に対し，その中心と I 型部分の詳細な記述を与え，非 I 型部分がいつでも II_1 型もしくは III 型因子環になることを証明した．II_∞ 型は決して生じない．さらに非 I 型部分として生じる因子環の型（Connes により細分類された III 型の型も含め）を与えられたデータから決めるアルゴリズムを与えた．特に III_0 型因子環は決して生じないことがわかる．このことの背後にあるメカニズムを説明する一方策として，自由積フォンノイマン環内の中心的列の様子を解析し，いつでも完全フォンノイマン環と呼ばれるものになることを明らかにした．以上の成果は以前に行われた（私を含む研究者らにより得られた）部分的結果をすべて含む最終結果であり，その証明自体も以前に行われたこの方向の仕事と独立でさらに必要なページ数も格段に短いものである．さらに非 I 型部分として生じる III_1 型因子環に対して冨田竹崎理論からの帰結である Connes による不変量（Sd-不変量と τ-不変量）を完全に決定した．この仕事から簡単に従う事実はいくつかあるが，例えば自由積フォンノイマン環が概周期的状態を持つための必要かつ十分条件が得られた．こちらも以前のいくつかの部分的な結果を含む最終結果である．その証明は以前の部分的結果と比べて難しいわけではないが，簡単な新たなアイディアに基づく以前の仕事に依存しない自己充足的なものである．これらの今回得られた一連の結果により

自由積フォンノイマン環に対する「一般論」が確立したと言えよう．

自由確率論が複素解析，実解析を道具として本質的に使うことから以前よりハーディー空間論に接する機会が多かった．これに動機付けられて，数年前に通常の開円盤上のハーディー空間を特別な場合として含む作用素環に基づく非可換ハーディー空間の研究に着手した．特に，ハーディー空間に対するバナッハ空間論の視点からの研究を非可換ハーディー空間に一般化し本質が何かを明らかにするのがその目的である．以前の私の研究で，非可換有界ハーディー空間の前共役の一意性及び Riesz 兄弟の定理，Gleason-Whitney の定理の非可換版などが証明できていた．[4]．引き続き 70 年代後半に Pelczynski により書かれた有名なモノグラフ（Banach Spaces of Analytic Functions and Absolutely Summing Operators. CBMS, AMS,1977）を非可換ハーディー空間を念頭に検討することから始めた．非可換ハーディー空間と言ってもそれは作用素環を基礎に非可換拡張されたものであるので，もはや関数の視点は消え去っている．さらに非可換性に由来した困難が色々生じる．この一連の研究の背後にある指導原理は「バナッハ空間としての性質は関数の視点が無くても定式化できる．なぜならその主張に関数の視点は不要であるからである．ゆえに非可換拡張できる可能性があるし，さらにそうすることにより本質が見えるのではないか？」である．ゆえに関数の視点が本質的か否かの吟味から始めなければならない．Pelczynski のモノグラフを見た時，その７節で証明されている極めて非自明な主張は非可換ハーディー空間に拡張できてもよいと思えた．他方で７節の結果を用いて証明されたある重要な結論は非可換ハーディー空間では否定的であることが判明した．ゆえにこの問題は微妙であってかつ本質的であることが解ったので研究課題として取り上げた．具体的に証明したことは以下の通り．非可換有界ハーディー空間の定義からその前共役はあるフォンノイマン環の前共役の商空間になっているが，弱コンパクト集合がこの自然なフォンノイマン環の前共役内の弱コンパクト集合に商写像を通して持ち上がることを証明した．Gleason-Whitney の定理により商写像の右逆写像の存在が言えているが，その写像が弱コンパクト性を保つことを証明したわけである．[5]．この結果の開単位円盤上のハーディー空間版がまさしく Pelczynski のモノグラフの７節で証明されている事実である．やや乱暴ではあるが，これで非可換理論が開円盤上のハーディー空間に対するそれの 70 年代後期のレベルにまで達したと言ってよいと考えている．またこの研究は更なる研究課題を私に示し，その研究課題に挑戦するのは今後の課題である．

フォンノイマン環の自由積の一般的性質を全て明らかにできたので，引き続きより一般のフォンノイマン環の融合積に対する同様な研究に着手した．自由積はその強い非可換性故に完全解答を得ることができたが，融合積は色々と複雑なことが生じることがわかっており完全解答は望めないであろう．逆に言えば，融合積の方が自由積に比べ将来の利用がより期待できるということであり，ある程度の一般的事実を確立しておきたい．以前に特別なクラスの融合積に対して詳細な研究をしたが，それを超えようとする試みとも見なせる．未発表であった以前の研究で得ていたいくつかの知見を基にその第一歩となるべき成果を論文にまとめ arXiv に載せた．証明できたことを簡単に言えば［1],[2］で自由積に対して示したことの「半分」を融合する部分環が I 型と言う条件の下で確立した．証明の「半分」は［1],[2］の議論を精密にすることにより行い「残り半分」は近年の II_1 因子環の研究で使われる手法を拡張して行った．[1],[2］の「残り半分」に当たるところは自由積特有の現象に多分に依存しているので融合積にそのまま拡張できないが，それに当たる部分を考察することを次の目標に見据えていた／いる．ゆえにこの時点で発表することにためらいがあったが，競合する研究がおこなわれていることを知らされたので論文の形に纏め ArXiv に載せた．このようにまだ改良の余地があると思われる仕事ではあるが，因子環基準，中心分解の記述，型の決定などに関して現時点で最強の結果であるようだ．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 8 件）

1. Y. Ueda, On type III_1 factors arising as free products, Math. Res. Lett., Vol.18 (2011), 909-920. 査読有
2. Y. Ueda, Factoriality, type classification and fullness for free product von Neumann algebras, Adv. Math., Vol.228 (2011), 2647-2671. 査読有
3. Y. Ueda, On the predual of non-commutative H^∞, Bull. London Math. Soc., Vol.43 (2011), 886-896. 査読有
4. Y. Ueda, On peak phenomena for non-commutative H^∞, Math. Ann., Vol.343 (2009), 421-429. 査読有

5. F. Hiai, T. Miyamoto and Y. Ueda, Orbital approach to microstate free entropy, Internat. J. Math., Vol.20 (2009), 239-249. 査読有
6. F. Hiai and Y. Ueda, A log-Sobolev type inequality for free entropy of two projections, Annales IHP Probab. Stat., Vol.45 (2009), 239-249. 査読有
7. Y. Ueda, Remarks on HNN extensions in operator algebras, Illinois J. Math., Vol.52 (2008), 705-725. 査読有
8. F. Hiai and Y. Ueda, Notes on microstate free entropy of projections, Publ. RIMS, Vol.44 (2008), 49--90. 査読有

〔学会発表〕(計 6 件)

1. Y. Ueda, Free product von Neumann algebras: with special emphasis on type III factors, Conference on von Neumann algebras and related topics, 1/10/2012, RIMS 京都大学.
2. Y. Ueda, Factoriality, type classification and fullness for arbitrary free products, II_1 factors: rigidity, symmetries and classification, 5/26/2011, IHP, Paris.
3. Y. Ueda, On free product von Neumann algebras, The 2nd workshop within the program "Bialgebras in Free Probability", 4/19/2011, ESI, Wien.
4. Y. Ueda, On the predual of non-commutative H^∞, Recent Developments in Operator Algebras, Univ. of Tokyo, 6/26/2010. 東京大学数理科学研究科.
5. Y. Ueda, Orbital free entropy dimension and its applications, Joint meeting of KMS and AMS, 12/17/2009. Ewha Womans University.
6. Y. Ueda, On the predual of non-commutative H^∞, 日本数学会 2009 年度年会, 関数解析分科会特別講演, 3/27/2009. 東京大学駒場キャンパス.

〔その他〕
ホームページ等
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ueda/

６．研究組織
(1)研究代表者
植田　好道 (UEDA YOSHIMICHI)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：00314724