

機関番号：22604

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540214

研究課題名（和文） 力学系の軌道の到達時間分布によるカオス現象の解析

研究課題名（英文） Analysis of Chaotic Phenomena by the Hitting Time Distribution of Dynamical Systems

研究代表者

平田 雅樹（HIRATA MASAKI）

首都大学東京・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：70254141

研究成果の概要（和文）：カオスと呼ばれる複雑な挙動を示す現象の中でも、今までの方法では捉えきれないようなものを、軌道がある領域に到達するまでの時間の分布を通して統計的性質を調べることで解析した。特に、非一様双曲型力学系という「弱いカオス」の力学系の場合に、典型的なカオスとは異なる分布が現れることを示した。また、異なる軌道が近づくまでの時間である再会時間の性質の研究も行った。

研究成果の概要（英文）：We have studied the stochastic properties of chaotic dynamical systems in which very complex motions appear by the analysis of the hitting time, that is, the time in which an orbit hit to some fixed domain. Especially, in the case of non-uniformly hyperbolic dynamical system which is a “weak chaos”, we showed that the different distribution from the one of the typical chaotic system appears. And, we also studied the stochastic properties of the meeting time distribution, that is, the time in which different orbits come close.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象、カオス

1. 研究開始当初の背景

物理学や経済学で近年重要な意味を持つカオス現象を特徴づけるものとしては、エントロピーや相関関数などがよく知られているが、従来の数学的意味ではカオス的と定式化できないような例も多くある。そのような力学系の軌道でも、その到達時間分布は典型的なカオスの力学系と同様な性質を持つ場

合がある。

例えば、1990年代初め、Ya. G. Sinai は、量子カオスに関連して、ある種のシュレディンガー方程式の固有値間隔分布について考察し、理論物理における予想（ポアソン分布が現れる）を数学的に正当化することを試み、問題を2次元トーラス上のあるエルゴード的変換による力学系の軌道の到達時間分布を

解析する問題に帰着させた。これは数理物理的にも大変意義のある問題であるが、この力学系はエルゴード的ではあるが混合性を持たないもので、従来の意味では強いカオスとは言えないものである。しかし、数値実験の示すところでは、軌道の（正規化した）到達時間分布の極限分布にはポアソン分布が現れており、実に興味深い例となっている。

この現象に触発されて、典型的カオス力学系である Axiom A 系などにおいて、まずこの現象の数学的正当化を行う研究が本研究の研究代表者を中心に行われ（Masaki HIRATA, “Poisson law for Axiom A diffeomorphisms”, *Ergod. Th. & Dyn. Sys.* v ol.13, 1993), 533–556)、また、非一様双曲型力学系の 1 次元モデル（物理的には間欠型カオスのモデル）においても、有限な不変測度が存在する限り、同様な現象が起こることが、研究代表者の共同研究により分かった。

(Masaki HIRATA, et al, “Statistics of return times: A General Framework and New applications”, *Commun. Math. Phys.*, 206(1999), 33-55)

次に問題となるのは、不変測度が無限測度になってしまうような非一様双曲型力学系に対しても同様な問題を考え、（正規化した）到達時間分布の極限分布がどのような形になるかを調べることであり、また、カオスの強さを示す他の指標（エントロピー、自己相関関数など）といかなる関係があるかを考察することである。

以上のようなことを背景として、本研究を行うこととなった。

2. 研究の目的

力学系の到達時間分布と軌道の性質との関係の解析を通して、従来とは異なった方法でカオス現象にアプローチすることを目的とした。ここで、力学系の軌道の、ある領域への到達時間（または再帰時間）の分布に関する問題について少し具体的に説明しておく。

距離空間 X 、 X 上の写像 f 、および f -不変な確率測度 μ からなる力学系 (X, f, μ) を考える。 U を X 内のある領域とし、点 x の f による軌道の U への k 回目の到達時間を $T(U, k)(x)$ とすれば、これは確率変数になる。 $\mu(U) \rightarrow 0$ となるように U を変化させるとほとんどすべての x で $T(U, k)(x)$ は発散するので、1 回到達時間の平均 $\int T(U, 1) d\mu$ で正規化した到達時間 $T(U, k)(x) / \int T(U, 1) d\mu$ を考え、この正規化した到達時間の $\mu(U) \rightarrow 0$ での極限分布を問題とする。（ U から出発した軌道だけを考え、再帰時間を問題とする場合は、 μ の代わりにその U への制限 $\mu|_U$ を用いる。）

この問題に関して、1. の背景のところでも

も述べたように、有限な不変測度が存在する限り、非一様双曲型力学系であっても、極限分布としてポアソン分布が現れることがわかっていたが、無限不変測度の場合には、1 回到達（再帰）時間の平均が無限大に発散してしまうため、正規化の適切な方法を決定するところから始める必要がある。その上で、到達時間分布の極限分布の形を調べ、それがエントロピーや相関関数の減衰オーダーなど、「カオスの強さ」を表す他の量とどのような関係があるかを考察することによって、無限不変測度を持つ力学系の「カオスの強さ」を測る新しい指標を定義することを目的とした。

また、研究を進める過程で、到達時間分布や再帰時間分布に関連した量として、「再会時間」分布という新たな概念を定義し、これに関しても、その諸性質について研究を行った。

先述の問題では、領域 U は固定点の近傍などを対象として考えていたが、再会時間とは、基準とする点の軌道と他の点の軌道が近くまでの時間を考察の対象とする。つまり、近傍 U が基準点の軌道に沿って移動する場合である。これに類似した問題は、モバイル通信理論などでテーマにもなっているが、数学的研究はいまだ行われておらず、この再会時間分布の基本的諸性質を考察することも、本研究の目的とした。

3. 研究の方法

無限不変測度を持つ力学系のエルゴード理論については、J. Aaronson や M. Thaler などによる研究があり、特に 1 次元モデルの諸性質に関する情報収集を連携研究者や国外の共同研究者等の協力を得て行い、到達時間分布の平均が発散してしまう場合の適切な正規化の方法を決定するためのヒントとした。

また、非線形物理関係の研究集会に参加し、これらの問題に興味を持つ数理物理関係の研究者と議論を重ねることで、物理的意味を考慮しつつ研究を進めた。

さらに、研究代表者が、年に一度、フランスのエコール・ポリテクニク、パリ第六大学などを訪問し、研究代表者の先行研究の共同研究者であるピカルディー・ジュールベルヌ大学の B. Saussol 氏等をはじめとする海外研究者とも共同研究を行い、無限不変測度を持つ非一様双曲型力学系の到達時間分布に関して、1 次元モデルの場合の数学的研究とその一般化についての研究を進め、それらの結果を踏まえて、研究分担者・連携研究者等と協力して解析を進めた。

研究過程で新たにテーマとなった「再会時間分布」に関しては、首都大学東京の首藤啓氏や赤石明氏、東京工業大学の山本謙一郎氏

等も交えて、研究を進めた。

首藤氏、赤石氏はともに非線形現象の数値実験による解析を専門とする研究者であり、典型的なカオス力学系であるベルヌイ・シフトの場合において、再会時間分布の平均および極限分布がどのような形になるかをコンピュータ実験を行うことで解析した。

この結果を踏まえ、研究代表者と山本氏は、まず、再会時間分布の平均を数学的に求めることを目標とし、同じくベルヌイ・シフトの場合において、筒形集合を近傍系とするモデルで計算を行った。

再会時間分布に関する研究は、まだ途中の段階であるが、得られた結果については、研究代表者がフランスを訪問し、海外の共同研究者とワークショップを行った際に報告し、これをテーマにディスカッションを行い、今後の研究の方向について指針を得た。

4. 研究成果

一様双曲型力学系および非一様双曲型力学系であっても有限な不変測度を持つ場合は、1 回再帰時間の平均が対象とする近傍 U の測度の逆数と一致する。このことから、無限不変測度を持つ非一様双曲型力学系の場合も近傍の測度で到達時間（または再帰時間）を規格化することは自然であると考えられる。間欠型カオスのモデルである 1 次元双曲型力学系について、上記のような方法で規格化した到達時間分布を考え、その極限分布を調べたところ、指数分布と安定分布の結合形が現れるという結果を得た。

非一様双曲型 1 次元力学系では、不動点でのグラフの接触のオーダーによって、不変測度が有限測度になるか無限測度になるかが決まり、この接触オーダーがある意味で「カオスの強さ」を表していると考えられる。そこで、この接触オーダーと（規格化した）到達時間分布の極限分布の形を比較し、指数分布と安定分布の結合係数が接触オーダーによって決定されることを明らかにした。その関連性を考察すると、接触オーダーが大きいほど（つまり、カオスの程度が弱いほど）、安定分布が強く出てくる形になっている。さらに、有限不変測度を持つか無限不変測度になるかの臨界値である接触オーダーが 2 の場合には（この場合、不変測度は無限測度になる）、ちょうど安定分布が消えて指数分布だけが残る形となっており、これは、この特殊なモデルの到達時間分布に関してすでに知られていた先行結果とも一致している。

以上のことから、無限不変測度を持つカオス力学系について、少なくとも 1 次元モデルに関しては、その「カオスの度合い」と到達時間分布の極限分布の形とが対応付けられると考えられる。

エントロピーをはじめとする以前から知

られてきたカオスの指標は、力学系の構造が明らかである場合には計算することができるが、到達時間分布の形は、系の構造が明らかでない場合でも、実験的に求めることができ、これは応用上重要な意義があるものである。

ただし、上記の結果は、現時点では 1 次元モデルの場合しか数学的検証ができていない。より一般的なカオス力学系についても同様な問題の研究を進めており、類似の結果が得られるものと予想しているが、まだ十分な数学的結果は得られておらず、これからの課題である。

また、本研究の過程で、到達時間分布に関連した新たな問題として研究テーマになった再会時間分布については、コンピュータ実験による数値解析の結果を踏まえ、数学的解析を進めた結果、ベルヌイ・シフトの場合に筒形集合を近傍系と考え、長さを固定した筒形集合に関する再会時間分布の平均値の計算を試みた。その結果、 k 回の写像で軌道がこの集合に入るような点（つまり、 k 回で軌道が近づくような点）の集合の測度がつくる数列の満たす漸化式を作ることができ、この数列は一般化したフィボナッチ数列となることがわかった。これを用いて母関数を計算し、平均値を出すことができると予想しているが、これに関しては、まだ特別な場合についてしか結果が出ておらず、最終的な結果を得るに至っていない。一般的な場合についての平均値の計算ができれば、それによって正規化した再会時間分布を考え、また、筒形集合の測度を 0 に近づけた場合の極限分布を考えることによって、到達時間分布と同様な問題にアプローチする予定である。

なお、コンピュータによる数値解析の結果は、極限分布が指数分布になることを示しているが、そこに現れるインデックスは到達時間分布の場合とは異なる性質を示しており、これは大変興味深い現象である。これらの結果については、赤石、首藤、山本の各氏と研究代表者との共著論文として、Meeting time distributions in Bernoulli system として現在投稿中である。再会時間分布の問題は、モバイル通信技術の理論の中でも研究が始まっており、応用上も重要な意味を持つと考えられるので、これからの研究課題として数学的解析を続けていくつもりである。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

- ① M.HIRATA, On the “meeting time” distribution of Bernoulli shifts, Proc. of workshop “Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena”, 査読有、1 巻、

- 2010、51-57
- ② 平田雅樹、到達時間分布と再会時間分布、論文集「非線形現象の数理」、査読有、1巻、2010年、25-35
 - ③ N. Kita、A. Shimomura、Large time behavior of solutions to Schrodinger equations with a dissipative nonlinear for arbitrarily large initial data、Journal of the Mathematical Society of Japan、査読有、61巻、2009、39-64
 - ④ A. Shimomura、Dispersive global solutions to the time-dependent Hartree-Fock type equation with a long-range potential、Journal of Mathematical Science、The University of Tokyo、査読有、16巻、2009、239-267

〔学会発表〕(計6件)

- ① 平田雅樹、Hitting time and Meeting time distributions of Chaotic dynamical systems、Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena II、2011年3月9日、エコール・ポリテクニーク
- ② 平田雅樹、到達時間分布と再会時間分布、非線形現象の数理、2010年10月21日、法政大学
- ③ 赤石明、平田雅樹、他、力学系のmeeting timeの計算、日本物理学会、2010年3月20日、岡山大学
- ④ 平田雅樹、On the “Meeting time” distribution of Bernouille shifts、Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena、2010年3月2日、エコール・ポリテクニーク
- ⑤ 下村明洋、Large time behavior of solutions to Schrodinger equations with a dissipative nonlinear for arbitrarily large initial data、非線形分散型方程式・波動方程式の初期値問題の適切性と散乱理論、2009年11月、北海道大学
- ⑥ 平田雅樹、An approach to the new characterization of chaotic phenomena by the return time、Infinite ergodic theory and its applications、2009年3月4日、エコール・ポリテクニーク

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平田 雅樹 (HIRATA MASAKI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：70254141

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

下村 明洋 (SHIMOMURA AKIHIRO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：00365066

鷺見 直哉 (SUMI NAOYA)
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：50301411

