

機関番号：24402

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540216

研究課題名 (和文) 臨界型変分問題の爆発解析および爆発に起因する解の定性的性質の研究

研究課題名 (英文) Studies on blow-up analysis of critical variational problems and qualitative properties of solutions caused by blow-up

研究代表者

高橋 太 (TAKAHASHI FUTOSHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10374901

研究成果の概要 (和文)：本研究課題では、「臨界型」と呼ばれる変分問題に付随する種々の非線形楕円型方程式の非コンパクトな解に対して、方程式に内在するスケール不変性を用いた「爆発解析」を行い、その結果として表れる極限方程式の解空間構造に対する知見から、漸近的非退化性・漸近的一意性などの爆発解の定性的性質を導いた。また、爆発解のスペクトル解析的な性質の研究も推進した。

研究成果の概要 (英文)：In this research, we studied various nonlinear elliptic equations associated with variational problem of so called “critical type”. By using the intrinsic scale invariance of the equations involved, we made “blow up analysis” of non-compact solution sequences to the equations and by exploiting the explicit structure of solution set of the limit equations, we obtain various qualitative properties of blowing up solutions, such as asymptotic nondegeneracy, asymptotic uniqueness, and so on. Also we studied spectral property of blowing up solutions and obtain several results on this matter.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：臨界型変分問題、爆発解析、解の定性的性質、漸近的非退化性、漸近的一意性、臨界ソボレフ指数

1. 研究開始当初の背景

本研究課題でいう『臨界型変分問題』とは、臨界ソボレフ指数を含む半線形楕円型方程式や2次元乱流理論に現れる平均場方程式のように、対応するエネルギー汎関数に対してパレースメールの意味でのコンパクト性条件が大域的には成り立たないために、従来の古典的な変分法による取り扱いが困難なタイプの変分問題のことをいう。

パレースメールのコンパクト性条件が壊れる際の詳しいメカニズムについては、1980年代に始まるリオンス、スツルベ、プレジューコロン等による研究によってその解析が進展し、非コンパクトな解の列、より一般には非コンパクトなパレースメール列は、『エネルギー汎関数に作用する非コンパクトな群による変換に沿って量子化された単位エネルギー分ずつのエネルギー密度を失って

いく』という描像が理解されるようになった。「バブリング」と呼ばれるこの現象は、1980年代初め頃のザックスウーレンベックによる調和写像の解析的理論にあらわれ、これを統一的に解釈しようとする研究は、1994年のリオンスによるフィールズ賞受賞の際の主要業績のひとつとなった。

以降、バーリ、ブレジス、コロソ、ハン、レイ等の先駆的研究を踏まえて、臨界ソボレフ指数を含む半線形楕円型方程式や平均曲率一定曲面の方程式に対して、解の存在・多重性と領域の位相的・幾何学的性質との関係、非コンパクトな解の列に対する漸近解析および特異極限の分類、特異極限からの摂動による爆発解の構成など、無限次元臨界点理論・無限次元モース理論・リャプノフ・シュミット縮約法等の非線形解析学の最新の成果を用いた研究が盛んに行われるようになってきたのが研究開始当初の状況であった。

2. 研究の目的

本研究課題の研究目的は、種々の臨界型変分問題の非コンパクトな解の列に対して爆発解析を実行し、その結果現れる極限方程式の解空間の構造を解析することで、爆発現象に起因する爆発解の定性的性質について、新しい知見を得ることである。

『爆発解は極限方程式の解の性質をどの程度引き継いでいるのか?』という問題意識は自然に思われるが、本研究課題の目的は、様々な臨界型変分構造を持つ方程式の爆発解に対して、一意性やエネルギー汎関数の臨界点としての非退化性などの無限次元モース理論的性質、また、解の等位集合の形状などの定性的性質と、スケール極限となる全空間解のそれらの性質との関係を解析することである。

本研究遂行のためには、非コンパクトな解の列に対する詳細な爆発解析を行うことが前提となっており、臨界ソボレフ型方程式や平均場方程式などのモデル方程式に対して、特に変数係数関数がついた場合の爆発解析を実行することも研究目的の一つである。

3. 研究の方法

一般に、スケールリングによって非コンパクトな解の列がコンパクト性を損失する状況を解析する手法を爆発解析と呼ぶ。

非コンパクトな解の列は、領域内の測度ゼロの集合上でエネルギー密度を凝集させて、デルタ関数的にその L^{∞} ノルムを無限大にしていく。爆発解析によって、密度の凝集する点（爆発点）の特徴づけが得られ、ポツホザエフ型の積分恒等式を用いることで L^{∞} ノルムが無限大となる際の詳細な漸近挙動も得られる。

非コンパクトな解の列は、方程式に内在する

スケール変換によって、全空間上の極限方程式の解にコンパクト一様収束することがわかるが、この全空間解に対しては、明示的な関数形が知られている場合が多く、たとえば臨界ソボレフ型方程式や平均場方程式の場合には、無限遠方でラプラスianの基本解と同じ減衰を示す具体的な解の族が存在する。逆のスケール変換によって全空間解のスケールリング族は非コンパクトな近似解の列になるが、前述の量子化された単位エネルギーは、この全空間解のエネルギーの値である。多くの臨界型変分問題の極限方程式にあらわれる全空間解は球対称性などの対称性を持ち、平行移動や相似変換などの自明な任意性を除き一意である。

またこの全空間解の回りでの線形化方程式の解空間は、元の極限方程式のスケール不変性から生じる分だけの次元を持つという意味で、全空間解のスケールリング族は有限次元の非退化臨界多様体を形成する。この臨界多様体の非退化性こそが、リャプノフ・シュミット法による種々の爆発解の摂動構成が成功する数学的根拠となっている。

本研究課題の目的は、極限方程式の明示的な解空間構造から引き出せる種々の情報が、漸近解析によって爆発解にどこまで引き継がれるのか、を調べることである。

4. 研究成果

2008度において研究代表者高橋は、主に研究分担者佐藤とともに、臨界ソボレフ型の2階および4階楕円型方程式の最小エネルギー解の漸近的一意性について研究を進め、特に領域や係数関数に対称性を課した場合にいくつかの結果を得て、研究成果をまとめた。

考える方程式が係数関数を持つ場合には、係数関数の影響が爆発解の定性的性質にどのように影響するかは興味ある問題であるが、高橋は領域に対称性等を仮定しない一般の場合に、爆発解の漸近的な非退化性と係数関数のかかわりを統一的に明らかにする研究に取り組んだ。ここでの研究手法である爆発解析は、劣臨界ソボレフ型および線形摂動項付きの臨界ソボレフ型方程式のいずれの場合にも適用でき、高橋はそれを用いることで、係数関数から定義される有限次元領域上のある関数項行列の爆発点における可逆性と、爆発解の（無限次元関数空間上の作用汎関数の臨界点としての）非退化性との間に密接な関係のあることを見出すことに成功した。これらの結果は有限次元領域上のある関数が、爆発点の位置やその爆発のスピードといった定量的なデータを決定するのみならず、爆発解の定性的な性質にまで関与することを示しており、たいへん興味深いと思われる。これらの研究成果は学術論文として発表されたほかに、日本数学会関数方程式論分科会

特別講演として高橋によって発表され、また東北大学大学院集中講義としてもその内容の一部が講義された。

2009年度には、高橋は、臨界ソボレフ型方程式にあらわれる爆発解のうち、変分法的には最も自然と考えられる最小エネルギー解について、その爆発に起因する解の定性的性質の研究に取り組んだ。具体的には、領域の微分位相同型不変量であるロバン関数と係数関数から定義される定義領域上のある関数の臨界点としての爆発点の非退化性と、その爆発点で1点爆発を起こす最小エネルギー解の非退化性との関係、さらには爆発点のモース指数と爆発解の(エネルギー汎関数の臨界点としての)モース指数との関係について調べ、成果を得た。技術的煩雑さは増すものの、同様の関係は重調和型方程式の1点爆発解についても成り立つと考えられ、特に最小エネルギー解に対しては、分担者佐藤とともにその漸近的非退化性を確立することができた。線形化方程式の固有値・固有関数の挙動についても、低い番号の固有値・固有関数については、通常のラプラシアンの場合の先行研究(Grossi-Pacella Math. Z(2005))と同様な結果が成り立つことが予想されるが、この部分の検証は残念ながら未完成である。

研究計画最終年度の2010年度には、高橋は、爆発・凝集現象をもたらす様々な楕円型方程式の爆発解の定性的性質の研究のうち、昨年度に引き続いて、特にそのスペクトル解析的な性質に焦点をあてて研究を推進した。今までの研究概要として、爆発解の爆発点の位置決めを行う有限次元空間上の関数であるハミルトニアン の諸性質が、爆発解に遺伝するメカニズムについて解析を進め、特に1点爆発解の場合に、その漸近的非退化性・漸近的一意性などの結果を得てきたのであるが、本年度ではさらに進んで、爆発解を含む非線形項を係数関数とする線形楕円型作用素の低い番号の固有値と固有関数の漸近挙動について研究を行い、いくつかの成果を得た。この研究は、より一般的に「係数関数がデルタ関数に収束するような線形作用素の列の固有値・固有関数の挙動はどのようなものか?」という問題の特殊なものとしてもとらえることができ、線形理論としても興味深く思われる。研究推進の途上で、爆発解の漸近解析を行う際の議論に不十分な点のあることが認識され、現在はその部分を補う方策を考察中である。また最近になって、連携研究者鈴木は、Grossi、大塚との共同研究で、2次元リウビル方程式の場合に、「多重爆発点のハミルトニアン の臨界点としての非退化性が、多重爆

発解の漸近的な非退化性の十分条件となる」という結果を得た(Grossi-Ohtsuka-Suzuki, ADE (2011))。類似の結果は、高次元での臨界ソボレフ型方程式や多重調和作用素を含む高階リウビル方程式に対しても成立するだろうことが十分期待される。多重爆発解のスペクトル解析的研究は現在まで行われていないが、今後の研究テーマとして興味深く、「多重爆発解の大域・漸近解析」として新規に科研費補助金研究課題として構想するにいたった。2010年度4月に高橋はローマ大学のM. Grossi氏を訪問し、特に領域が2次元円環領域の場合に、多重爆発解の爆発点の位置や爆発解の定性的性質について共同研究を開始した。2次元円環領域のグリーン関数が厳密に書き表わせる(Hickeyの公式)ことを用いて、新しい知見がいくつか得られ始めている。

本研究課題の研究期間中に、高橋は、国内招待講演29件、ソウル国立大・香港中文大・香港城市大・台湾アカデミア・シニカ・ローマ大・ナポリ大等での海外講演7件などの研究成果発表を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計21件)

① F. Takahashi: An eigenvalue problem related to blowing-up solutions for a semilinear elliptic equation with the critical Sobolev exponent, Proceedings of 1st Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, **4**, no. 4, 907-922 (2011) (査読有)

② F. Takahashi, and A. Uegaki: A Payne-Rayner type inequality for the Robin problem on arbitrary minimal surfaces in \mathbb{R}^N , Results in Mathematics, **59**, no. 1-2, 107-114 (2011) (査読有)

③ F. Takahashi, and M. Grossi: Nonexistence of multi-bubble solutions to some elliptic equations on convex domains, Journal of Functional Analysis, **259**, no. 4, 904-917 (2010) (査読有)

④ F. Takahashi: An eigenvalue problem related to the critical Sobolev exponent:

variable coefficient case,
Differential and Integral Equations, {¥bf 23}, no. 9-10, 827-860 (2010) (査読有)

⑤ F.Takahashi: Spectral estimates of least energy solutions to the Brezis-Nirenberg problem with a variable coefficient,
Journal of Differential Equations, {¥bf 248}, 2497-2527 (2010) (査読有)

⑥ F.Takahashi: Nondegeneracy of least energy solutions for an elliptic problem with nearly critical nonlinearity,
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, {¥bf 140}, no. 1, 203-222 (2010) (査読有)

⑦ T.Sato, and F.Takahashi:
A nondegeneracy result for least energy solutions to a biharmonic problem with nearly critical exponent,
RIMS Kokyuroku Bessatsu {¥bf 15}.
Proceedings of "Mathematical Analysis on the Self-organization and Self-similarity", 73-85 (2009) (査読有)

⑧ M.Kurokiba, T.Ogawa, and F.Takahashi:
Global existence of solutions for a nonlinearly perturbed Keller-Segel system in \mathbb{R}^2 ,
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), {¥bf 60}, no. 5, 840-867 (2009) (査読有)

⑨ F.Takahashi: Morse indices and the number of maximum points of solutions to a two-dimensional elliptic problems,
Archiv der Mathematik., {¥bf 93}, no. 2, 191-197 (2009) (査読有)

⑩ T.Sato, and F.Takahashi: Asymptotic uniqueness for a biharmonic equation with nearly critical growth on symmetric convex domains,
Funkcialaj Ekvac., {¥bf 52}, no. 2, 213-232 (2009) (査読有)

⑪ M.Ishiwata, T.Ogawa, and F.Takahashi:
Multiple existence of solutions for a nonlinearly perturbed elliptic parabolic system in \mathbb{R}^2 ,
Electric Journal of Differential Equations, {¥bf 2009}, no. 32, 1-10 (2009) (査読有)

⑫ F.Takahashi: An asymptotic nondegeneracy result for a biharmonic

equation with the nearly critical growth,
Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA), {¥bf 15}, no. 4-5, 623-637 (2008) (査読有)

⑬ T.Suzuki, and F.Takahashi: Nonlinear eigenvalue problem with quantization,
"Handbook of Differential Equations, {¥bf 5}: Stationary Partial Differential Equations" (edited by M. Chipot) Elsevier, Amsterdam, Chap. 4, 277-370 (2008) (査読有)

⑭ F.Takahashi: Asymptotic behavior of least energy solutions for a biharmonic problem with nearly critical growth,
Asymptotic Analysis, {¥bf 60}, no. 3-4, 213-226 (2008) (査読有)

⑮ F.Takahashi: Asymptotic nondegeneracy of least energy solutions to an elliptic problem with the critical Sobolev exponent,
Advanced Nonlinear Studies, {¥bf 8}, no. 4, 783-797 (2008) (査読有)

⑯ T.Sato, and F.Takahashi: Asymptotic uniqueness of solutions for an elliptic problem with nearly critical growth on symmetric domains,
Communications on Applied Nonlinear Anal. {¥bf 15}, no. 3, 1-18 (2008) (査読有)

⑰ T.Suzuki, and F.Takahashi: Capacity estimate for the blow-up set of parabolic equations,
Mathematische Zeitschrift, {¥bf 259}, no. 4, 867-878 (2008) (査読有)

[学会発表] (計 7 件)

① 高橋太・上垣彰伸 「A Payne-Rayner type inequality for the Robin problem on arbitrary minimal surfaces in \mathbb{R}^N 」
2011 年春季年会 (早稲田大) 幾何学分科会 (震災による学会中止のため、アブストラクト出版による発表)

② 高橋太 「Spectral estimates of least energy solutions to the Brezis-Nirenberg problem with a variable coefficient」
2010 年秋季総合分科会 (名古屋大) 函数方程式論分科会講演 (2010 年 9 月 24 日)

③ M.Grossi・高橋太 「Nonexistence of multi-bubble solutions to some elliptic equations on convex domains」

2010年春季年会(慶応大)函数方程式論分科会講演(2010年3月25日)

④ 佐藤友彦・高橋太「A nondegeneracy result for least energy solutions to a biharmonic problem with nearly critical exponent」

2009年秋季総合分科会(大阪大)函数方程式論分科会講演(2009年9月25日)

⑤ 高橋太「ある2次元楕円型方程式の正値解の Morse 指数と最大点の個数について」
2009年秋季総合分科会(大阪大)函数方程式論分科会講演(2009年9月25日)

⑥ 高橋太「臨界 Sobolev 指数に関連するある固有値問題について: 変数係数の場合」
2009年春季年会(東京大)函数方程式論分科会講演(2009年3月27日)

⑦ 高橋太「臨界 Sobolev 型方程式の爆発解析と漸近的非退化性」
2008年秋季総合分科会(東京工業大)函数方程式論分科会特別講演(2008年9月26日)

[その他]

ホームページ等

大阪市立大学「研究者要覧」

http://rdbsv02.osaka-cu.ac.jp/profile/ja.gXz11UI2G-EhZv5aCmc0.w==.html#books_articles_etc

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 太 (TAKAHASHI FUTOSHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 10374901

(2) 研究分担者

西尾 昌治 (NISHIO MASAHARU)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 90228156

(H22(2010年度)は連携研究者)

加藤 信 (KATO SHIN)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 10243354

(H22(2010年度)は連携研究者)

佐藤 友彦 (SATO TOMOHIKO)

学習院大学・計算機センター・助教

(H22(2010年度)からは学習院大学・理学部・客員研究員に所属・職名変更)

研究者番号: 50397676

(3) 連携研究者

鈴木 貴 (SUZUKI TAKASHI)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号: 40114516