様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 6 月 17 日現在

機関番号：30115
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540217
研究課題名（和文） 回転場の非圧縮流体に対する漸近展開とその応用

研究課題名（英文） Asymptotic expansion for incompressible flow in rotating fields and its applications.

研究代表者
松井 伸也（Matsui Shinya ）
北海道情報大学・情報メディア学部・教授
研究者番号：50219367

研究成果の概要（和文）：Coriolis 力を伴った定常 Navier-Stokes に対し，2 乗可積分空間で解を Coriolis^(-m) のオーダーで漸近展開し（m＝2,3），それぞれのオーダーの漸近方程式とその解の解析を行った．

研究成果の概要（英文）：For the solutions of steady Navier-Stokes equations I calculated asymptotic expansion with respect to (Coriolis force parameter)^(-m) in L^2 space with m = 2, 3. I obtained asymptotic equations and analyzed its solutions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,500,000 円	450,000 円	1,950,000 円
２００９年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
２０１０年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
年度			
年度			
総　計	3,500,000 円	1,050,000 円	4,550,000 円

研究分野：非線形解析
科研費の分科・細目：数学，大域解析学
キーワード：回転場，非圧縮性粘性流体，Coriolis 力，特異摂動，テーラープラウドマンの定理

１．研究開始当初の背景

3 次元空間の適当な領域が，ある軸の周りに角速度（Coriolis 力/2）で回転させた場合，非圧縮性粘性流体は，外力として Coriolis 力を外力とした Navier--Stokes 方程式で記述される．この方程式に関しては，Mahalov 氏（研究協力者）・Nicolanko 氏が中心となりここ 10 年ほどの間で研究（時間局所解・時間漸近的大域解の存在）が進んだ方程式である．この 5 年ほどに限ると，日本では儀俄氏・松井・Saal 氏・乾氏を中心としたグループの解析（時間局所解・時間大域解の存在），また柴田氏を中心とした解析（レゾルベントの評価），ドイツでも Hiber 氏を中心にした解析（解の存在），ロシアでは Seregin 氏の解析（解の滑らかさ）の解析などがあり活発な研究になりつつある．しかし歴史的にみると，この問題は Poincaré による解析 Sur la précession des corps déformables, Bull. Astronomique, 27, p. 321-356, 1910 , Sobolev による軍事機密研究，Ob odnoi novoi zadache matematicheskoi fiziki, Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Ser. Matematicheskaia, 18, No. 1, p. 3-50, 1954 など多数，と歴史の長い研究対象であることにも注意したいと思う．この状況で申請者は，Coriolis 力を無限大にしたときの特異摂動問題を解析していた．この解析に続く研究として本研究を行った．

２．研究の目的

これまでの研究について述べたいと思う．

基盤研究（C）:
コリオリ力を入れた粘性流体方程式の気象現象的視点からの特異摂動による解析
（課題番号：17540201，代表：松井 伸也，05 年-07 年）
では，次の結果を得た．

Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and S. Matsui
Uniform local solvability for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force, Methods and Applications of Analysis, Vol. 12 (2005) 381-394.

概要：初期条件が測度のあるクラス場合に時間局所的な解の構成をした．このクラスでは解の存在時間が，Coriolis 力 パラメーター Ω について一様に取れることも示した．なお領域は 3 次元空間全体である．

Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and S. Matsui, Navier-Stokes Equations in a Rotating Frame in R^3 with Initial Data Nondecreasing at Infinity, Hokkaido Math. J., Vol. 35 (2006) 321-364.

概要：回転軸方向に平均を取れる有界なベクトル場とある Besov 空間（Fourier 級数で特徴づけられる）の和でかける初期条件に対し，時間局所的な解の構成を行った．この場合の解の存在時間は，Coriolis 力 パラメーター Ω について一様に取れなかった．なお領域は 3 次元空間全体である．

Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, S. Matsui, and J. Saal,
Rotating Navier-Stokes Equations in R^3_+ with Initial Data Nondecreasing at Infinity: The Ekman Boundary Layer Problem, to appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis.

概要：領域 D が半空間 $R^3_+ = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 > 0 \}$ の場合に考えた．ここで構成した解は Eckman 境界層の特殊解である Eckman 渦の周りに解を構成した．解は境界に平行な成分について有界で垂直方向（回転軸方向）については 無限円転で減衰する空間 $B^0_{\infty,1,\sigma}(R^2;L^p(R_+))$ で構成した．この場合の解の存在時間も，Coriolis 力 パラメーター Ω について一様に取れなかった．

これらの研究に続き，領域が Poincaré の不等式が成立する場合に，次の結果を得た．定常問題の解の $\Omega \to \infty$ とした場合の漸近挙動を決定した（特異摂動問題）：
外力 $f = f_\Omega$ を $L^2(D)$ （2 乗可積分なクラス）で与え，そのノルムが Ω に対し一様有界な場合，解 u_Ω もまた $H^2_{0,\sigma}(D)$ で一様有界となり，$\Omega \to \infty$ のとき
$u_\Omega \to u_\infty$ weakly in $H^2_{0,\sigma}(D)$
を満たす特異摂動解 u_∞ が存在（一意的ではない）し．さらに u_Ω の x_3 についての偏微分は $L^2(D)$ において，Ω に関して一様融解となる．この結果は気象学でいうところの Taylor-Proudman の定理の証明に対応する．さらに領域 D が $\{ x = (x', x_3)$ in $R^3 : a(x') \leqq x_3 \leqq b(x'),\ x' = (x_1, x_2)$ は 2 次領域 D' に含まれる$\}$ の場合，ある適当な条件下で
$u_\Omega - \underline{u}_\Omega \to 0$ in $L^2(D)$ as $\Omega \to \infty$
を示した．ただし $\underline{u}_\Omega$ は u_Ω の回転軸方向の積分平均である．この特異摂動極限は，解 u_Ω の Coriolis 力 パラメーター Ω に関する展開を示唆している．

現在気象現象の解明のため様々なモデル方程式が取り扱われている．しかし数学的に明確なバックボーンのあるモデルは見あたらないようである．本申請は「気象モデル」のうち，Coriolis 力が典型的な現象のモデルを¥textbf{数学的なバックボーン}と共に構築しようとするわけである．例えば $¥Omega ¥to ¥infty$ とした場合，定常解 $u_¥Omega$ の漸近的な流れ（速度場） $u_¥infty$ は数学的に決定できる．しかし先にも述べたように漸近的な流れは¥textbf{一意的ではなく}，また速度場の平均も領域に依存する．この状況でモデル方程式を作成しようと思うと，まず $1/¥Omega$ の項を決定する必要がある．なお $¥Omega^0$ の次の項が $¥Omega^{-1}$ という保証もないが，ここでは便宜上 $1/¥Omega$ としておく．ここまでが問題 1 である．この後問題 2 の解決に向かうわけであるが，それには問題 3 が考慮されたうえで，モデル方程式の決定となるわけである．

このような特異摂動による流体現象の理解で数学的に成功した例はあまりない．2 次元定常境界層が，Navier-Stokes 方程式の接合漸近展開により部分的に解決されているだけではなかろうか．この場合はモデル方程式が知られている状態でなされた研究である．その難しさは接合漸近展開の数学的定式化にあった．本研究はモデル方程式に確としたものが無く，境界層の理解とは一線を画すものである．この研究が進めば数学的には Navier-Stokes 方程式の研究に新しい側面を与えると思われる．Navier-Stokes 方程式は典型的な非線形方

程式であるから，その影響は少なくないはずである．またモデルの検証が，positive な形で進めば気象現象の理解につながるはずである．なお個人的にはこの研究の延長上に「熱帯性低気圧」の発生原因を見たいという思いもある事を最後とし研究目的とする．本研究では，Coriolis 力を伴う Navier-Stokes 方程式にたいして，次をその目的とした．

１） 定常解の Coriolis 力についての解の漸近展開

２） 漸近展開の各項の方程式（モデル方程式）の決定．

３） モデル方程式の検証．

現在気象現象の解明のために様々なモデル方程式が対象とされている．本研究は Coriolis 力が典型的な減少のモデルを数学的なバックボーンとともに構築するのことをその目的とした．たとえば Coriolis 力→∞という特異摂動を行ったとき，特異摂動解は速度場の平均流として存在が証明できる．しかし平均流は領域の形に依存し，また一意性は成立しない．より詳しい特異摂動解を得るために，パラメーター ε = 1/ (Coriolis 力）で定常解を漸近展開し，各オーダーの方程式を決定し，その解の特異摂動極限を考えるというのは自然であろう．その後の問題として先にあげた２），３）の目的を掲げたわけである．

３．研究の方法

「定常解の Coriolis パラメーターについての漸近展開」の解析を行った．

１）L^2(D)$ で行った特異摂動問題を L^p(D) (1 < p < ∞) で解決できるか否かを考えた．この問題は一見 Hilbert 空間で行った解析を Bnach 空間に置き換えただけのようである．しかし解の公式（準備中の論文で証明）をみたとき，回転軸方向と Coriolis 力パラメーター Ω との関係が分かるが，p＝2 のときは，解析に無関係になる（これは方程式の構造である）．そこで Coriolis 力 パラメーター Ω と回転軸方向関係を見るために L^p(D) (1 < p < ∞) での解析を必要とした．

２）L^2(D) において，
u_Ω - u_∞ = O(Ω^{-m) as Ω→∞ のオーダー m の決定考察した．

¥item 漸近展開の各項の方程式（モデル方程式）の決定．

この後「モデル方程式の検証」を解析した．

研究目的の中でも述べたが，一意ではない漸近的な流れ u_∞ を中心に漸近展開を与えることから，どの流れを代表させるべきかが問題となり，この決定には「気象学的な側面」が前面にでてくると予想されるので，Mahalov 氏の助言・数値計算などは欠くことの出来ない一面である．Mahalov 氏は Arizona 州立大の数学教室に属するだけでなく，工学部の数値解析の講座にも属し気象関係の数値計算を行っている研究者であるから，数値解析の手法は彼の助言を必要とした．

ここで本研究全体を通じて必要とした研究体制を述べたい．研究協力者 3 人を迎え，それぞれの役割などを次のように行う予定である．

研究協力者：

Alex Mahalov (Arizona State University, USA)；研究代表の行う解析結果を踏まえ，気象学的側面への助言と数値解析への助言を行った（モデルの構築とその検証に不可欠である）．

乾 勝也（芝浦工業大学）・笹山 智司（北海道大学）；文献の整理と解説．研究代表の行う解析の検証．Mahalov 氏の指導の下におこなう数値解析（モデルの検証に不可欠である）．

４．研究成果

Coriolis力を伴った定常Navier-Stokes に対し，2乗可積分空間の場合に，解を ε^m のオーダーで漸近展開し（ m = 2,3)，それぞれのオーダーの漸近方程式とその解の解析を行った．モデル方程式の数値解析は，良い結果を得られなかった．

最終年度では，今までの解析に加え，境界層方程式の更なる解析も併せて行った．回転場での流体モデルの検証には，境界層の挙動をどう見るべきかを考える必要があるのではないか，という事に思い至ったのが理由である．Coriolis 力のない場合でも境界層方程式の解析は容易ではないので，Coriolis 力のない場合を取り使った．この計算は今後の研究の下地にする計算で，今年度は，定常2次元境界層方程式，いわゆるPrandtl方程式のある条件（後述）を満たす解が，境界の近くでどのような挙動示すかを解析する準備の計算を行った．具体的には，どのような変数変換でPrandtl方程式の解のエネルギーが定義出来るかを，様々な変数変換で調べてみた．対象とした方程式はPrandtl方程式のVon Mises 形式である．この方程式は境界に平行な速度成分の2乗が満たす方程式で，境界に垂直な変数は流線とした方程式である．この方程式の解のクラスは境界に垂直な変数に関して単調増加で，境界上では0（境界条件），境界から離れた場所での解の値は正である様なクラスとした．なおこのような解は実際に構成されている（Oleinik, Matsui-Shirota など）．この解に対する満足の行く変換はまだ発見できていないが，おおむねの方向はとらえることが出来た．なお，本研究の

幾つかの成果は，研究会等で発表を行ったが，論文成果は現在執筆中である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）
現在執筆中

〔学会発表〕（計 2 件）
①松井伸也，「気象モデルに関する最近の状況について(2 回講演)」,2009 年 11 月 22 日，CES 研究会（早稲田大学）
②松井伸也，「On the bounded solutions of the Navier-Stokes equations (4 回講演)」，2010 年 9 月，Zhejiang Normal University, China

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
松井 伸也（Matsui Shinya ）
北海道情報大学・情報メディア学部・教授
研究者番号：50219367