

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008 ~ 2010

課題番号：20540220

研究課題名(和文) 非可換口ホリン性の Elliott 分類問題への応用

研究課題名(英文) Application of the non commutative Rokhlin property to Elliott classification problem

研究代表者

大坂 博幸(OSAKA HIROYUKI)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：00244286

研究成果の概要(和文)：

核型単純 C^* -環における Elliott 分類問題を C^* -接合積において考える際に重要な役割を果たす、従順群から C^* -環への作用のロホリン性を、 C^* -接合積の場合を含む C^* -指数有限である C^* -環のペアの間に現れる条件付き期待値に拡張し、分類問題において重要な役割をする C^* -環の性質の遺伝性について成果を得た。

研究成果の概要(英文)：

The Rokhlin property of an action from an amenable group on a C^* -algebra plays an important role in C^* -crossed product algebras when considering the Elliott classification problem in simple nuclear C^* -algebras.

We extended the Rokhlin property for a conditional expectation of a pair of C^* -algebras with a finite C^* -index. We obtained, then, several results about the transmission of important properties of C^* -algebras which play important roles in Elliott classification problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環, C^* -環, C^* -接合積, ロホリン性,

1. 研究開始当初の背景

作用素環論において自己同型写像の研究は深くなされているが、位相力学系における測度不変変換に関するロホリン性の非可換版である C^* -環上の自己同型写像のロホリン性について研究するのが目標である。75年に

Connes によりフォンノイマン環上の自己同型写像のロホリン性が導入され、84年に Herman-Jones が UHF 環上の自己同型写像にロホリン性を導入し、UHF 環上における周期 2 の自己同型写像の分類をおこなった。93年に Bratteli-岸本-Rørørdam-Størmer に

より、フェルミオン環上の両側シフト自己同型写像がロホリン性を持つことが示され、その後岸本は一般の C^* -環 A 上の自己同型写像のロホリン性を定義し精力的に研究した。特に、 A が単純で実階数 0 、ただ一つのトレースを持つ AT 環 (すなわち、トラス上の連続関数環と有限次元 C^* -環との C^* -テンソル積から成る C^* -環の帰納的極限で表される)、 α が A 上の自己同型写像とすると、 α がロホリン性を持つ特徴付けをした。特に、 α が内部自己同型写像にホモトープならば、生成される接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ が再び実階数 0 をもつ AT 環になることを示している。ここで、 C^* -環が実階数 0 を持つとは、 A の任意の自己共役作用素が有限スペクトラルを持つ自己共役作用素で近似されることをいう。Phillips は、ロホリン性よりも弱いトレース的ロホリン性を、巡回群 G から与えられた単純 C^* -環 A の自己同型写像の集合 $\text{Aut}(A)$ への作用 α に定義をし、 A が Lin の意味での分類クラス (トレース的安定階数 0) に入るとき、作用 α がトレース的ロホリン性を持つとそれから生成される接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ が同じく分類クラスに入ること示した。単純 C^* -環における Elliott プログラムに関連して、分類可能なクラス (例えば、Elliott-Gong, Lin により示された AH -環) に属する C^* -環 A 上の離散群 G から $\text{Aut}(A)$ への作用 α とそれから生成される接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ の性質を明らかにする、これらの研究は重要である。2003年に、大坂-Phillips によりトレース的ロホリン性を整数群 Z に拡張され、岸本のロホリン性に対応する結果をより広い C^* -環のクラスで示した。この結果を用いて、2004年に Lin -大坂により先の岸本の結果をより精密にしている。さらに、単純 AT 環上のロホリン性を持つ自己同型写像のクラスにおける $\text{Aut}(A)$ 大きさを調べ、 K_1 群上の写像の情報から AT 環上のロホリン性を持つ自己同型写像で与えられた K_1 群上の写像を導くものが構成できることを示された。

$A \subset C^*(G, A, \alpha)$ の枠組みで上記の結果を眺めると、一般に、 $A \subset B$ の C^* -環のペアで問題を考え直し、綿谷の C^* -指数理論を用いるという新しい考察に至る。すなわち、 C^* -環 B から C^* -環 A への条件付き写像 E がどのような性質を持てば、 A の性質が B に遺伝するかが問題になる。例えば E が指数有限タイプであるとき、射影作用素に関する SP 性については大坂で研究されている。安定階数に関して大坂-照屋、大坂により示さ

れている。

2. 研究の目的

(1) 整数群 Z の $\text{Aut}(A)$ への作用におけるトレース的ロホリン性と岸本の意味でのロホリン性に差は存在するかどうかを明らかにする。大坂-Phillipsにより、トレース的安定階数 0 である単純 C^* -環上の自己同型写像がロホリン性を持つとトレース的ロホリン性を持つことが示されている。この逆が成立しない例はまだ見つかっていない。

(2) 2次元トラス上のFurstenberg変換 ϕ から自然と導かれる非可換トラス環 A 上の自己同型写像 α に対して、 ϕ がuniqueエルゴート性をもつことと α がトレース的ロホリン性を持つことが同値であることが大坂-Phillipsで示されているが、このとき α がロホリン性を持つかどうか明らかにする。また、 ϕ がuniqueエルゴート性を持たないときその接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ がどのような性質を持つ C^* -環であるか調べる。

(3) より広い群 G から $\text{Aut}(A)$ への作用におけるロホリン性の定式化を行う。例えば、 $G = Z^2$ の場合を中村の定式化を基に模索する。

(4) 綿谷指数有限な C^* -環のペア $A \subset B$ における条件付き期待値 E のロホリン性に対応する概念の定式化を試みる。外部性については、大坂で定式化されている。

3. 研究の方法

(1) A を安定有限な単純 C^* -環としたとき、整数群 Z から $\text{Aut}(A)$ への作用でトレース的ロホリン性を持つがロホリン性を持たない例が存在するか調べる。

(2) A を安定有限な単純 C^* -環としたとき、有限群 G から $\text{Aut}(A)$ へのトレース的ロホリン性を持つ作用から生成される接合積の基本性質を調べる。

(3) 綿谷指数有限な C^* -環のペア $A \subset B$ における条件付き期待値 E のロホリン性に対応する概念の定式化を試みる。

(1)に関しては、ひとつの候補として、2次元トラス $S^1 \times S^1$ 上のFurstenberg変換 $\phi(\phi(x, y) = (\exp(2\pi i \theta)x, \exp(2\pi i f(x))x^d y))$ (θ は無理数) の非可換版である A_θ 上のエルゴート性を持たないときの $\alpha_{f,r,d}$ があげられる。この変換がロホリン性を持たない条件を判定できれば目標を達成するが、トレ

一的ロホリン性をもつこととロホリン性を持つことが同値かも知れない. Lin氏と取り組んだ単純AT上でトレース的ロホリン性の新しいモデルが, この問題の解決のヒントになるのではと期待している.

(2) に関しては, 現在 Phillips 氏と共同研究をしており, 少しずつ解明をしている.

(3) に関しては, 岸本氏がおこなった自己同型写像の外部性の特徴付けに対応する概念を条件付き期待値 E に定義し, C^* -環の重要な概念であるSP性, Cancellation 性の遺伝性の解明に強力な役割を果たした. 同様に, 自己同型写像のロホリン性に対応する概念を条件付き期待値 E に定式化することに取り組む.

4. 研究成果

(1) Lin 氏との共同研究において, AT 環上の K -データからトレース的ロホリン性を持つ自己同型写像の構成をおこなった. これにより, AT 環上の自己同型写像のクラスにおいてトレース的ロホリン性を持つ自己同型写像のクラスが小さくないことを示せた.

(2) 射影作用素に関する cancellation 性の遺伝性について C^* -指数有限の C^* -環のペアについて Jeong, 大坂, 照屋, Phillips の4人で明らかに出来た. これは, 1996年のJeong—大坂の共同研究から始まり10年の月日がかかった大作である. Cancellation 性を持つことは, C^* -環の分類問題の際用いる K_0 -群の計算において役に立つ情報である.

(3) C^* -接合積の場合を含む C^* -指数有限の範囲での C^* -ペア環間に作用する条件付き期待値に対してロホリン性を定義し, Elliott 分類において重要 C^* -環のクラスの遺伝性について, 小高, 照屋, 大坂の研究としてまとめることが出来た. これは, 分類可能な単純 C^* -環と有限群から構成される接合積の代数構造決定をした大坂—Phillips 氏との共同研究の一般化であり, C^* -指数理論有限な C^* -環のペアにおける分類問題において重要な結果である.

(4) C^* -環分類問題において重要な役割をする安定階数の新しい計算式を構成した. これで, 安定階数 1 をもつ単純 C^* -環からの接合積などによる新しい C^* -環の安定階数が計算できる.

(5) Elliott 分類問題において中心的役割を果たしている Jiang-Su 環 Z の安定性について, 綿谷指数有限なペア $P \subset A$ に関して研究をおこなった. C^* -環 A が Z 安定とは, $A \otimes Z \cong Z$ のことをいう. 最近 Elliott 不変量が同じ単純 C^* -環 A, B で同型でない例が, Toms 氏, Rordam 氏それぞれによって発見された.

この A, B は, Z 安定ではない. また, 今まで Elliott 分類クラスに入る単純 C^* -環は Z 安定であることが証明されている. これらを踏まえ, 現在は, Z 安定な単純 C^* -環のクラスにおいて Elliott 不変量 $\text{Ell}()$ が完全不変量であることが予想されている. すなわち, $\text{Ell}(A) \cong \text{Ell}(B) \Leftrightarrow A \cong B$. この Z 安定の遺伝性について次のことを調べた: 与えられたペア $P \subset A$ が大坂—照屋の意味でロホリン性を持てば, A が Z 安定であるとき, P が Z 安定である. ここでロホリン性はある意味重要な過程であり, 実際, ロホリン性の条件をゆるめれば, 遺伝性が成立しなくなる例が, Phillips 氏により構成されている. それ故, 本結果は, Elliott 分類問題において重要な結果を与えることになる.

(6) Winterにより導入されたdecomposition rank, nuclear dimension rankについて, 綿谷指数有限なペア $P \subset A$ において研究した. これらの性質が綿谷指数有限なペア $P \subset A$ において遺伝することを明らかにした. すなわち, 綿谷指数有限なペア $P \subset A$ が大坂—照屋の意味でのロホリン性をもつとき(但し, A の単純性は仮定しない),

① A が n 以下のdecomposition rank をもつとき, P のdecomposition rankも n 以下である. 特に, 任意の有限群 G から泉の意味でのロホリン性をもつ作用から生成される C^* -接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ のdecomposition rankが n 以下である.

② A が n 以下のnuclear dimension rankをもつとき, P のnuclear dimension rankも n 以下である. 特に, 任意の有限群 G から泉の意味でのロホリン性をもつ作用から生成される C^* -接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ のnuclear dimension rankが n 以下である.

これらの C^* -接合積の結果は, 2010年にWinter-Zachariasより提出された問題への解答である. また, Cuntz 半群の strict comparison 性についても同様な結果を得た. これらの結果は, K -群の計算が困難な C^* -接合積の分類問題に役立つことが期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① H. Osaka and N. C. Phillips, Crossed products by finite group actions with the Rokhlin property, Math. Z., 査読: 有, 印刷中(掲載確定・2011年発行予定).
- ② H. Osaka and J. Tomiyama, Note on the structure of matrix monotone functions, Frontiers of Analysis, Engineering Mathematics, 査読: 有, 印

- 刷中 (掲載確定・2011 年発行予定)
- ③ H. Osaka, S. D. Silvestrov, and J. Tomiyama, Operator convex functions on C^* -algebras, the Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 査読 : 有, 59 巻, 2010 年, 48 – 52.
 - ④ H. Osaka and J. Tomiyama, Double piling structure of matrix monotone functions and of matrix convex functions, Linear and its Applications, 査読 : 有, 431 巻, 2009 年, 1825-1832.
 - ⑤ J. A Jeong, H. Osaka, N. C. Phillips, and T. Teruya, Cancellation of C^* -crossed products, Indiana J. Math., 査読 : 有, 58 巻, 2009 年, 1537 – 1564.
 - ⑥ K. Kodaka, H. Osaka, and T. Teruya, Rohlin property for inclusions of C^* -algebras with a finite Watatani index, Contemporary Mathematics in Amer.Math. Soc. 査読 : 有, 503 巻, 2009 年, 179-195.
 - ⑦ H. Lin and H. Osaka, The Rokhlin property for automorphisms on simple AT-algebras, Ergod. Th. Dynam. Sys., 査読 : 有, 28 巻, 2008 年, 1215 - 1241.
 - ⑧ H. Osaka, Stable rank for inclusions of C^* -algebras, Internatinal Journal of Mathematics, 査読 : 有, 19 巻, 2008 年, 1011 – 1020.

[学会発表] (計 13 件)

- ① 大坂博幸, 照屋保, Strongly self-absorbing property for inclusions of C^* -algebras with a finite Watatani index, 日本数学会 2011 年会, 2011 年 3 月 22 日, 早稲田大学理工学術院(東京都).
- ② 大坂博幸, 照屋保, Local property for C^* -algebras and the Rokhlin property, 作用素環論の最新の進展について, 2010 年 9 月 2 日, 京都大学数理解析研究所(京都府).
- ③ 大坂博幸, Inclusion of unital C^* -algebras and the Rokhlin property, International Conference on Quantum Probability and Related Topics, 2010 年 8 月 15 日, JNCASR (Bangalore, India).
- ④ 大坂博幸, Strongly self-absorbing property for inclusions of C^* -algebras with a finite Watatani index, Special Week on Operator Algebras, 2010 年 6 月 23 日, East China Normal Univ. (Shanghai, China).
- ⑤ 大坂博幸, Double piling structure of matrix monotone functions and of matrix convex functions, KOTAC2010, 2010 年 6 月 18 日, Incheon 大学 (Seoul, Korea).

- ⑥ 大坂博幸, Local properties for C^* -algebras and the Rokhlin property, 2009 joint meeting of the Korean Mathematical Society and the American Mathematical Society, 2009 年 12 月 17 日, Ehwa 大学 (Seoul, Korea)
- ⑦ 大坂博幸、小高一則、照屋保, The Rokhlin property for inclusions of C^* -algebras, 日本数学会 2009 年度秋期総合分科会, 2009 年 9 月 25 日, 大阪大学 (大阪府).
- ⑧ 大坂博幸, Tracial approximation for crossed products by finite groups with the tracial Rokhlin property, Special Week on Operator Algebras, 2009 年 6 月 23 日, East China Normal Univ. (Shanghai, china).
- ⑨ 大坂博幸, Rokhlin property for inclusions of C^* -algebras with a finite Watatani index, 2009 年 6 月 19 日, Kyungpook Univ(Daigo, Korea).
- ⑩ J. A Jeong, 大坂博幸, 照屋保, N. C. Phillips, Cancellation for inclusions of C^* -algebras of finite depth, 日本数学会 2008 年度秋期総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学(東京都).
- ⑪ 大坂博幸, N.C.Phillips, Crossed products by finite group actions with the Rokhlin property, 日本数学会 2008 年度秋期総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学(東京都).
- ⑫ 大坂博幸, The Rokhlin property for inclusions of C^* -algebras with a finite Watatani index, Operator structures and Dynamical systems, 2008 年 6 月 24 日, Leiden Univ.(Leiden, Nederland).
- ⑬ 大坂博幸, Stable rank for inclusions of C^* -algebras, KOTAC2008, 2008 年 6 月 20 日, Seoul Univ.(Seoul, Korea).

[その他]

ホームページ等

<http://www.ritsumei.ac.jp/se/~osaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大坂 博幸 (OSAKA HIROYUKI)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号 : 00244286

(2) 研究分担 なし

(3) 連携研究者

照屋 保 (TERUYA TAMOTSU)
群馬大学・教育学部・准教授
研究者番号 : 30594246