

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540370

研究課題名（和文）低次元量子系の有限温度相関関数と量子エンタングルメントの完全 WKB 解析

研究課題名（英文）The exact WKB analysis on correlation functions of low dimensional quantum systems and quantum entanglement.

研究代表者

鈴木 淳史 (SUZUKI JUNJI)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：40222062

研究成果の概要(和文):有限温度における一次元量子系の相関関数に関する定量的評価のため、量子転送行列の方法と完全 WKB 法を組み合わせる事により、近似によらない新しい定量的方法を確立することができた。この具体的な応用としてスピン 1/2 の量子磁性鎖に適用することにより相関関数および量子的もつれの磁場、温度依存性等に関する多様な振る舞いを発見した。

研究成果の概要(英文): We develop a novel formulation in an exact quantitative study on the correlation functions of 1D quantum systems at finite temperature. This is accomplished by combining the quantum transfer method and the exact WKB method. The formulation enables us to carry a rigorous numerical study on the quantum correlations. As a concrete example, we apply it to the spin 1/2 quantum XXZ chain. The variety of behaviors of the correlation functions and quantum entanglement is observed as we change the system temperature and an applied magnetic field.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究代表者の専門分野：統計力学・数理物理

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：可積分系

1. 研究開始当初の背景

(1)低次元量子強相関系に関してバルクの量を超えた様々な実験的知見が得られ始め、また量子通信など近未来の情報基盤の理論的基礎としても量子相関に対する興味がますます高まってきている。

しかしながら、比熱、帯磁率等のバルクの量に比べ、量子相関に対する定量的な解析は格段に困難であり、従来から相互作用の無い場合、またはそのまわりの摂動的な取り扱いで満足せざるをえなかった。

(2)近年、量子群に関する研究の進展により、この状況がかわりつつある。とくに神保・三輪および彼らの共同研究者によりゼロ温度、ゼロ磁場における短距離相関に関して、新しい定量的方法論が提案された。

実際の実験との比較、および量子情報への応用を視野に入れた場合、もちろん上の方法論を有限温度、有限磁場に拡張する事が望ましい。

海外共同研究者らの先行する研究により

その方向の形式的な拡張は得られたが、その表式は実用的な評価において困難があり、具体的な定量的評価のスキームが求められていた。

2. 研究の目的

(1)本研究は有限温度、有限磁場中での量子相関において、形式的な表式を超えて定量的に厳密に評価する方法論を確立することを目的とする。

(2) またその具体的な応用として、量子もつれに対して定量的評価をおこない、それを用いて、量子磁性の分野で提案された興味深い現象である量子・古典クロスオーバーに対する理解を深める事も試みる。

3. 研究の方法

(1) 通常の定式化によると有限温度における量子系の相関関数を直接取り扱うためには、摂動論にたよむざるをえない。本研究では厳密な評価を目的としているので、このような定式化は回避する。そのかわりに仮想的な次元をひとつ新たに導入する。これにより有限温度一次元量子系の問題を、有限サイズ二次元古典系の問題としてとらえ直す直す量子転送行列の方法を採用した。

(2) 上の書き換えにより有限系の問題を厳密に取り扱う必要が不可避に生じる。これを直接に取り扱う事は大変困難な作業である為、問題をうまく選ばれた補助関数に関する解析性の議論に帰着させる。そこでこれらの補助関数に対して微分方程式の解析において独立に発見されていた完全 WKB 法を適用する事により量子相関関数さらに量子もつれを、厳密にしかも高精度に評価した。

(3) 具体的な計算は数式処理言語

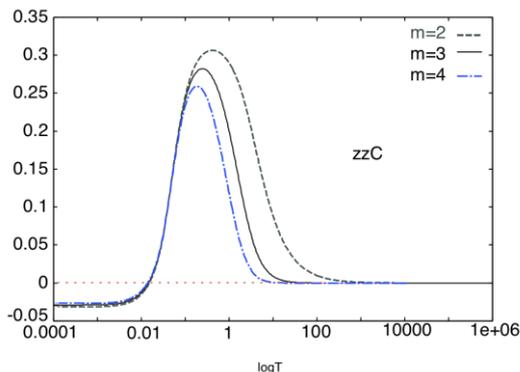
Mathematica および FORM を用いておこなった。定量的な比較の為、短いスピン鎖に関する数値的対角化による相関関数の評価、さらに無限長スピン鎖に対する密度繰り込み群による相関関数の数値計算を平行しておこない、比較をおこなった。

4. 研究成果

(1) 相関関数の表式は結合した多重積分でしかも非自明な積分測度を含んでおり、定量的な評価が非常に難しいものであった。一方、ゼロ温度では、相関関数が縮約された KZ 方程式をみたすことより「隠れたフェルミオンの構造」が存在し、多重積分が因子化することが見いだされていた。有限温度では KZ 方程式の類似すら存在しておらず、因子化するかどうかは不明であった。我々は短距離の相関関数の表式を具体的に調べ、補助関数の満

足する積分方程式を利用する事に依り有限温度においても相関関数の因子化がおこることを発見した。さらにこの因子化を一般に仮定することにより、相関関数を、縮約された KZ 方程式により評価可能な代数的部分と非自明な温度依存性をしめす解析的部分に分離した。

(2) さらにこの因子化仮説を利用することにより、初めてスピン 1/2 の量子磁性鎖に対して任意の温度、磁場下での相関関数を厳密に、しかも定量的に評価することに成功した。(下図参照)



ここでは補助関数に成立する非線形積分方程式を解く必要があったが、以前の共同研究による完全 WKB 法に関する結果を適用する事に依り、これを高精度でおこなうことが可能であった。

(3) 弱い強磁性量子スピン鎖に関して、有限系の数値的体格化より、zz 相関に関して高温では強磁性であり正、低温では量子ゆらぎにより負になること、いわゆる量子・古典クロスオーバーが予想されていた。上の図はまさにそれを証明する事となった。

さらに低温から高温へのクロスオーバーは単調でなく、むしろ中温度領域において、予期せぬ古典オーダーの伸長が存在する事が見いだされた。

(4) 上のクロスオーバー現象のさらなる定量的解析のため量子もつれを特徴づける量のひとつである concurrence を様々な相関関数を組み合わせる事により厳密に評価した。その結果、concurrence が非ゼロである量子的領域からゼロになる古典領域のオンセットの温度と、クロスオーバー温度はほぼコンシステントであること、等方的フェロ点より遠ざかると量子的ゆらぎが強くなり、差異が認められるようになることが明らかになった。

(5) 上の定式化をさらに高いスピンを持つ系に拡張すべく研究をおこなった。この場合、解析的な性質にスピン 1/2 のときにはなかった困難があらわれ、安直な処方は無効ではない。それにもかかわらず、スピン 1 の場合には厳密な定式化に成功した。ゼロ温度の極限で、期待される結果が再現できる事が確かめられたが、一般の有限温度では、その結果は依然として多重積分の形でしか与えられず、それ以上の単純化は一般に困難であった。磁化に対応する一点関数に限ってのみ 2 重積分を単純な積分に因子化できることは確かめられたが、定量的な評価は技術的な問題のため将来の課題として残った。

(6) 上のスキームの中で補助関数の評価において、可積分模型の転送行列間に成立する関数等式が大きな役割を果たす。そこで、上の解析をさらに広いクラスの模型に適用する準備として、関数等式に関する数理解析もおこなった。とくに近年、様々な分野で大きな関心をよんでいるクラスター代数の立場から関数等式の拡張性に対して議論をおこなった

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, "T-systems and Y-systems in integrable systems", J. Phys. A: Math. Theor.(査読あり) Vol 44 (2011) 146pp.

② F. Goehmann, A. Seel and J. Suzuki, "Correlation functions of the integrable isotropic spin-1 chain at finite temperature", Journal of Statistical Mechanics(査読あり) 11011 (2010) 42pp.

③ R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, "Periodicities of T-systems and Y-systems", Nagoya Mathematical Journal (査読あり) Vol 197 (2010) 59-174

④ 鈴木淳史, 「可積分系の数学」
～ソリトンを源流として～, 数理科学 (査読なし) (2010) 3月号 64-69.

⑤ A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, "Symmetry, Integrability and Geometry: Method and Applications" (査読あり) Vol 5 (2010) 23pp.

⑥ 鈴木淳史, "可積分系と統計力学", 数理科学 (査読なし) (2009) 11月号 28-33.

⑦ H. Boos, J. Damerau, F. Gohmann, A. Klumper, J. Suzuki and A. Weisse, "Short-distance thermal correlations in the XXZ chain", Journal of Statistical Mechanics (査読あり) 0808 (2008) 25pp

[学会発表] (計 7 件)

① 鈴木 淳史, "ODE/IM 対応", 可積分系数理解析の多様性 (2010年8月18日 京都大学数理解析研究所、京都市)

② J. Suzuki, "The dark side of higher spin chains", Exactly solvable models in statistical mechanics(2010年7月14日 University of Queensland(Brisbane, Australia))

③ J. Suzuki, "Quantum-Classical Crossover Revisited", Condensed Matter Physics Meets High Energy Physics(2010年2月11日, 東京大学 (IPMU) 柏市)

④ J. Suzuki, "One dimensional quantum spin chain at finite temperatures", Infinite analysis 09(2009年7月27日, 京都大学理学部、京都市)

⑤ 井上 玲, "T-system の周期性について", 日本数学会 (2009年3月29日, 東京大学、目黒区)

⑥ J. Suzuki, "Finite temperature matrix elements", Low Dimensional Quantum Field Theories and Applications, (2008年10月2日、ガリレオガリレイ研究所 (フィレンチェ・イタリア))

⑦ J. Suzuki, "Finite temperature correlation functions", Finite Size technology in low dimensional quantum field system IV, (2008年7月2日, APCTP (浦項・韓国))

[図書] (計 3 件)

① F. Goehmann and J. Suzuki, World Scientific, Quantum spin chains at finite temperatures ("New trends in Quantum integrable systems")(2010) 20pp

② P. Dorey, C. Dunning, D. Masoero, J. Suzuki and R. Tateo, Springer, "New Trends in Mathematical Physics", (2009) 11pp.

③ 鈴木 淳史, 丸善出版、数理科学辞典 (広中平祐編集) 物理の数学 「可積分模型」の項 (2009) 7pp.

[その他]

ホームページ等

[http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~sjsuzuk/
js-shizuoka-japanese.html](http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~sjsuzuk/js-shizuoka-japanese.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 淳史 (SUZUKI JUNJI)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：40222062

(2) 研究分担者 なし

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

国場 敦夫 (KUNIBA Atsuo)

東京大学大学院・総合文化研究科・教授

研究者番号：70211886

中西 知樹 (NAKANISHI Tomoki)

名古屋大学大学院・多元数理研究科・

准教授

研究者番号：80227842

(4) 研究協力者

アンドレアス・クリュンパー

(Andreas Kluemper)

ブッパタール大学・教授

フランク・ゲーマン

(Frank Goehmann)

ブッパタール大学・講師