

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 2 月 7 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20549004

研究課題名（和文） 軌道体構成法によるムーンシャイン頂点作用素代数の構成

研究課題名（英文） Constructions of the moonshine vertex operator algebra by using orbifold theories

研究代表者

島倉 裕樹 (SHIMAKURA HIROKI)

愛知教育大学 教育学部 講師

研究者番号：90399791

研究成果の概要（和文）：本研究によって、直交空間を用いたムーンシャイン頂点作用素代数の新しい構成法が得られた。応用として、ムーンシャイン頂点作用素代数上でのモンスター単純群の極大部分群の新しい記述が得られた。これは既知のゴレイ符号やリーチ格子の構成法の類似である。したがって、符号、格子と頂点作用素代数の間の新しい関係が得られたことになる。さらに、この手法を用いることで新しい中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成が期待される。

研究成果の概要（英文）：By this research project, we obtain a new construction of the moonshine vertex operator algebra based on quadratic spaces. As an application, we obtain a new description of a maximal subgroup of the Monster simple group. This is an analog of the known constructions of the Golay code and Leech lattice. Hence we obtain a new relation among codes, lattices and vertex operator algebras. Moreover, by this approach, we would construct new holomorphic vertex operator algebras of central charge 24.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	0	900,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	0	0	0
年度			
総計	2,500,000	480,000	2,980,000

研究分野：頂点作用素代数

科研費の分科・細目：代数学・群論

キーワード：頂点作用素代数，ムーンシャイン，モンスター，符号，格子，自己同型群，直交群

1. 研究開始当初の背景

有限単純群の中で最も興味深い群として、無限系列に属さない 26 個の散在型のうち位数が最大であるモンスターと呼ばれる群がある。そして、モンスターはムーンシャイン頂点作用素代数の自己同型群として実現されている。この実現を通じて、Borcherds はムーンシャイン現象と呼ばれるモンスターと保型関数の間の対応を説明した。また E₈ ディンキン図形とモンスタースの 2A と呼ばれ

る対合の共役類の元との不思議な関係を示唆した McKay 観察などの他の興味深い現象に対しても、VOA を用いた研究による解明が進んでいる。このようにモンスタースの研究において、VOA を用いた手法は非常に効果的であり、ムーンシャイン頂点作用素代数上での直接的な作用を見ることが出来る特色によってモンスターに対する理解がより深まる。

ムーンシャイン頂点作用素代数は Frenkel

らによって Z_2 軌道体構成法を用いて最初に構成され、その後宮本雅彦氏によって枠付頂点作用素代数として再構成された。これらの構成法において、モンスターの位数 2 に関する作用は理解しやすい。それゆえ、ムーンシャイン頂点作用素代数を用いた位数 2 に関連するモンスターの研究が国内外の多くの研究者によって行われている。しかしながら、位数が 2 と素であるような元に関連するモンスターの研究は、それらの作用をムーンシャイン頂点作用素代数上で理解しやすい構成法が無いために VOA を用いて行うことが難しいのが現状である。

2. 研究の目的

本研究では軌道体構成法を用いてムーンシャイン頂点作用素代数を再構成することである。そして、構成法に付随するモンスター単純群の新しい性質を見つけることである。特に、位数 3 の自己同型に付随する軌道体構成法によるムーンシャイン頂点作用素代数の構成法を行う。さらに Frenkel らによって予想されている位数 3, 5, 7, 13 に対する軌道体構成法を用いたムーンシャイン頂点作用素代数の構成の解決を目指す。

3. 研究の方法

(1) 位数 2 の場合の軌道体構成法によるムーンシャイン頂点作用素代数の構成とその自己同型群がモンスター単純群であることの別証明を元に研究を進める。そこでの鍵は二つの格子から得られる頂点作用素代数の単純カレント拡大の理論の適用と部分頂点作用素代数の自己同型群の持ち上げによるモンスターアマルガムを構成する部分群の実現である。この証明手法の他の位数への応用を行い、研究を進める。とりわけ、位数 3 の場合は Coxeter-Todd 格子から得られる頂点作用素代数を用いた具体的なアイデアを得ている。

(2) 単純カレント拡大を用いたムーンシャイン頂点作用素代数の構成を行う。特に、申請者の過去の研究の中で得た直交群を自己同型群に持つ頂点作用素代数を用いる事で、直交空間と正則頂点作用素代数を対応させることが可能となる。とりわけ、この方法を用いる事でモンスター単純群の部分群が直交群を用いて記述出来る可能性が非常に高い。

(3) 宮本氏による枠付き頂点作用素代数としてのムーンシャイン頂点作用素代数の構成法を元として、モンスター単純群を研究することが可能である。特に、符号の自己同型群と枠を固定する部分群との間の関係を調べておくことは大変有意義である。これらは

新しい軌道体構成法の参考になると思われる。

(4) 最初のムーンシャイン頂点作用素代数の構成法はゴレイ符号からリーチ格子を構成する方法の類似であったことはよく知られている。したがって、符号、格子と頂点作用素代数の間の類似を研究することは今後の頂点作用素代数の研究の発展に大きく寄与するものである。特に、符号から格子の構成法と格子から頂点作用素代数の構成法の間に類似を見つけ、対応する概念をきちんと整理しておくことは非常に重要である。

4. 研究成果

(1) 格子に付随する頂点作用素代数の格子のノルム 4 の枠に付随するヴィラソロ枠の固定部分群の決定法を与えた。この研究によってムーンシャイン頂点作用素代数を含む多くの枠付き頂点作用素代数の対称性が符号の対称性を用いて記述される。さらに、1998 年に Dong-Griess-Hohn によって発表された枠付き頂点作用素代数を定義した論文の中で挙げられた枠の固定部分群に関する問題が解決された。特に、固定部分群は、二元符号とノルム 4 の枠から得られる位数 4 の巡回群上の符号の自己同型群の情報から決まることを示した。本研究で扱った枠付き頂点作用素代数は位数 2 の自己同型に付随する軌道体構成法を取り扱うことができるため、より深く軌道体構成法について理解することができるようになった。その応用として、宮本雅彦氏によって計算されていたある枠の固定部分群の構造が符号の言葉を用いて完全に理解することができた。

(2) 枠付ムーンシャイン頂点作用素代数のある格子に付随する頂点作用素代数と付随する直交空間を用いて記述した。さらに、モンスターのある極大 2-局所部分群の直交群を用いた新しい記述を得ることが出来た。この直交空間と直交群を用いた研究方法を二元符号と格子にも応用することで、ゴレイ符号とリーチ格子に対する同様な構成を与えることができた。すなわち、直交群と直交空間を用いたゴレイ符号、リーチ格子、ムーンシャイン頂点作用素代数の統一的な記述方法を与える事に成功した。そして、マッシュ群とコンウェイ群に関する同様の考察も行い、形の類似している極大 2-局所部分群がやはり得られる事がわかった。これらの成果から、符号・格子・頂点作用素代数の間の新しい関係を与えることに成功した。特に、759, 196560, 196884 というゴレイ符号、リーチ格子、ムーンシャイン頂点作用素代数に関連する重要な数字を統一的な方法で記述する方法をあたえた。

本研究で扱った構成法により、様々な視点

からムーンシャイン頂点作用素代数を研究することが可能となる。特に、いくつかの構成法は位数 2 の自己同型に付随する軌道体構成法となっている。それに加えて、モンスター単純群のムーンシャイン頂点作用素代数への作用に関する新しい知見を得ることができた。その一つはある部分頂点作用素代数の集合での可移性である。この性質はやはりマシュー群のグレイ符号への作用、コンウェイ群のリーチ格子への作用の類似と理解することが可能である。この証明においては直交空間のある種の極大全特異部分空間の一意性が鍵となっており、同様の証明が符号や格子でも可能であることを確かめた。これらの応用として、ムーンシャイン頂点作用素代数を用いたモンスターの位数の決定問題に対する一つの手法が得られたことになる。すなわち、ある種の部分頂点作用素代数の個数が決定できれば、そこからモンスターの位数が決定できる。しかしながら、この解決にはさらなる研究が必要である。

(3) 格子に付随する頂点作用素代数の同型問題の解決を行った。特に、二元符号から得られる格子についても類似の結果が成り立つことを確認し、符号・格子・頂点作用素代数の間の新しい関係を得ることができた。そして、Kleinian 符号から得られる格子まで含めて考えることで、対応がより一層はっきりすることがわかった。この結果は頂点作用素代数の分類問題の解決の際に有用である。

この研究の鍵となるある格子の特徴付けは過去の研究で既に得られており、対応する符号の特徴付けを同様の手法で与えた。また、様々な計算を頂点作用素代数から格子、格子から符号、符号から Kleinian 符号へと帰着させ、簡単に行っている。このような手法は一般に複雑な頂点作用素代数の計算を効率よく行うための新しい方法となりうる。またこの研究成果により、他の格子から頂点作用素代数の構成法における同型問題の研究を行う前に Kleinian 符号、符号、格子の間での同型問題の研究を行っておくことで効率よく研究が進められると予想できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① H. Shimakura On isomorphism problems for vertex operator algebras associated with even lattices, Proc. Amer. Math. Soc.掲載決定, 査読有
- ② H. Shimakura, An E_8 -approach to the moonshine vertex operator algebra, J. London Math. Soc. 83 (2011),

493--516.査読有

- ③ 島倉裕樹, Frame stabilizers for framed vertex operator algebras associated to lattices, 第 25 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, (2009) 86--94.査読無
- ④ 島倉裕樹, Even lattices obtained from doubly even codes and VOAs obtained from even lattices, 数理解析研究所講究録 {1656} (2009), 74--83.査読無
- ⑤ C.H. Lam and H. Shimakura, Frame Stabilizers for framed vertex operator algebras associated to lattices having 4-frames, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), 4547--4577. 査読有

[学会発表] (計 12 件)

- ① 島倉裕樹, Toward the classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, 頂点作用素代数・有限群・組合せ論の研究, 京都大学数理解析研究所, December 2010.
- ② H. Shimakura, Toward the classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, Mini-Workshop on infinite dimensional Lie algebras and related topics, National Cheng Kung University, September 2010.
- ③ H. Shimakura, Quadratic spaces and the moonshine vertex operator algebra, The 8th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, POSTECH, February 2010.
- ④ H. Shimakura, An E_8 approach to the moonshine vertex operator algebra, One day workshop on algebraic combinatorics, Academia sinica, October 2009.
- ⑤ 島倉裕樹, 頂点作用素代数と符号, 組合せ論サマースクール 2009, 稚内北星学園大学, September 2009.
- ⑥ 島倉裕樹, Thompson 群と Thompson 格子について, 第 21 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2009.
- ⑦ H. Shimakura, Extremal Type II codes and Virasoro frames of the moonshine VOA, Algebras, Groups and Geometries 2009, 玉原国際セミナーハウス, August 2009.
- ⑧ H. Shimakura, Codes and the moonshine vertex operator algebra, Designs and codes, Hills Sunpia Yamagata, June 2009.
- ⑨ 島倉裕樹, Frame stabilizers for framed vertex operator algebras associated to

lattices, 第 26 回代数的組合せ論シンポジウム, 遊学館, June 2009.

- ⑩ 島倉裕樹, Even lattices obtained from doubly even codes and VOAs obtained from even lattices, 有限群・頂点作用素代数と組合せ論, 京都大学数理解析研究所, January 2009.
- ⑪ H. Shimakura, Even lattices obtained by Construction B and VOAs V_L^{+} , Mini workshop on algebraic combinatorics, National Cheng Kung University, November 2008.
- ⑫ 島倉裕樹, 頂点作用素代数における, 符号・格子との類似について, 第 53 回代数学シンポジウム, いわて県民情報交流センター, August 2008.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

島倉 裕樹 (SHIMAKURA HIROKI)
愛知教育大学 教育学部 講師

研究者番号 : 90399791

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :