様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月　２０日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号： 20560374

研究課題名（和文）汎用回路解析プログラムの解の精度評価に関する回路理論及びグラフ理論的検討

研究課題名（英文）Circuit- and graph-theoretic approach to the accuracy-guaranteed algorithm for a general-purpose circuit simulator

研究代表者
西　哲生（NISHI TETSUO）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：40037908

研究成果の概要（和文）：研究期間中の主な成果は次の３点である。
１）２個のトランジスタを含むある直流回路が５個の解をもつことを、**精度保証計算の観点から数値的に証明**したこと２）精度保証付き数値計算の良さを検証するための極めてたちの悪い問題、具体的には、**極めて条件数の大きな行列**の生成に関して、2.1)行列の特異値と条件数の上界との関係解明、2.2)極めて大きな条件数の行列の具体的生成法、2.3)ベンチマーク行列としてのより望ましい行列の一生成法を提案したこと
３）SPICE などの汎用回路解析プログラムなどにより得られた解の誤差の上界を回路構造から簡単に算出する方法を提案したこと

研究成果の概要（英文）：Main results are the following three items:
1)By using the accuracy-guaranteed algorithm developed in our laboratory we numerically proved that the specified two-transistor circuit proposed previously by other researchers has surely five solutions. As the result we see that the maximum number of solutions of two-transistor circuits is equal to or greater than five.2) On the generation of an extremely ill-conditioned matrix 2.1) we clarified the relation between the singular values of the matrix and an upper bound of the condition number, 2.2) we proposed a new simple method to generate an extremely ill-conditioned matrix, 2.3) we proposed a method to generate a matrix with more desirable properties as the bench mark matrices for the accuracy-guaranteed algorithm.3) We proposed several methods to estimate the upper bound of the errors of the solutions obtained by circuit analysis program such as SPICE.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学・通信・ネットワーク工学

キーワード：非線形理論・回路

１．研究開始当初の背景

数値計算により得られた解に対して、真の解との誤差の上界を厳密に評価する、いわゆる精度保証計算の研究が、急速に進展しており、ごく最近にも種々の画期的手法が提案されつつある。回路解析においては SPICE などの汎用解析プログラムが専ら使われているが、得られた解に対する精度保証の観点からの研究は殆どなされていなかった。その理由の一つは、回路における回路パラメータは元々あまり精度がないことと、通常は非常に尤もらしい解析結果が得られていることによる。しかしながら、どんな場合でも本当に良い解を与えているのかという疑問は残っている。

この種の疑問点について検討するには、非常にたちの悪い回路方程式を解いてみるのがよく、そのためには、如何にしてたちの悪い多種多様な回路方程式をシステマティックに生成するかが第１の問題であり、また解に対する誤差の上界の評価(精度保証)法が第 2 の問題である。当然のことながら、この評価(精度保証)にかかる時間(計算量)があまりかかっては意味がない。したがっていかに少ない計算量で評価できるかも大きな問題である。

２．研究の目的

研究対象が線形方程式(または線形回路)であるか非線形であるかにより、大きく異なる。本研究では、上記の研究背景のもとに、いくつかの課題について検討する。

2.1)　非線形回路の典型として、トランジスタの解の個数に関する精度保証付き数値計算の適用について検討する。

2.2)　極端に解きにくい方程式(すなわち、数値解の誤差が極めて大きくなりがちな方程式)の生成として、線形連立方程式の係数行列が極めて大きな条件数をもつ行列の生成

2.3)　SPICE などで得られた解の誤差の上界を評価する回路理論的側面からの簡単な計算法の検討。

３．研究の方法

研究目的の 2.1）項については、簡単な２トランジスタ回路で回路パラメータを適当な値に選び、研究室において以前から開発・発展された手法を適用する。

研究目的の 2.2）項については、極端に大きな条件数をもつ行列を、Rump の方法を拡張として検討する。

研究目的の 2.3)項については、グラフ理論などを利用して、回路構造の情報を利用した解の誤差の上界を評価する。

４．研究成果

研究成果の概要で述べた項目について以下に詳しく述べる。

４－１）２個のトランジスタを含む直流回路の解の個数が、最大５個であることを数値的に証明したこと(「５．主な発表論文等」の項の文献(3)及び(11)参照)

m個のトランジスタ(Ebers-Moll モデルで表された大域的モデル)を含む回路が任意の回路パラメータの値に対し最大何個の解をもち得るかは、実用的には記憶回路の設計などにも関わる重要な問題であり、また理論的には非線形回路理論の分野で最も基本的な未解決問題とされている。しかし、一般の m に対してはもちろん、m=2, 3 という簡単な場合についてすら確定的な答えが出されないままであった。その後、回路理論的考察から、(数値的に)５個の解をもつ回路というのが提案されたが、誤差の精度に関する検討はなく、厳密な意味では５個の解が確認されたわけではなかった。

本研究では、既に提案されていた回路形に対して５個の解が存在しそうな回路パラメータを推定し、研究代表者の所属する研究室で開発・発展された精度保証付き数値計算法をこの回路の解析に適用し、厳密な意味で、５個の解が存在することを確認した。

４－２）精度保証付き数値計算の良さを検証するための極めてたちの悪い問題、具体的には、極めて条件数の大きな行列の生成に関して、2.1)極めて大きな条件数の行列の特徴、2.2)条件数の上界と特異値との関係解明、2.3)極めて大きな条件数の行列の具体的な生成法、2.4)ベンチマーク行列としてのより望ましい行列の提案とその一生成法の提案(「５．主な発表論文等」の項の文献(1)，(5)，(6)，(7)，(9)，(13)，(15)，(17)参照)

最初に、条件数の極めて大きな整数行列(各要素は約 16 桁の整数)の例を挙げておく。

$$A = \begin{bmatrix} 2846847459617 & 7375963852667 & -4334095179782 & 182528230406 \\ -69488917556992 & -179826676440722 & 105593761740495 & -4446803644453 \\ -234282750850329 & -612550919288466 & 361799407987148 & -15242823584412 \\ 256444227204832 & 673681764272726 & -399032187838948 & 16814954595921 \end{bmatrix}$$

この行列は行列式 det(A)=1 を満たし、条件数は約 10^{50} という大きな値をもつ。しかしこの行列要素の任意の最下位桁を 1 でも変えると途端に行列式の値は 10^{50} となり、また条件数は 10^{16} 程度に減少する。このことからも分かるように、極めて大きな条件数の行列は極めて特別な数値バランスのもとで得られ、したがってこのような行列の生成には、整数行列による、数論的検討が妥当である。

(整数)行列の条件数の上界は、行列要素の大きさが大きいほど大きくなる。したがって、問題を明確に述べると、次のようになる。

問題１　整数行列 A=[a_{ij}]が

$$|a_{ij}| \le \mu \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

$$\det(A) = 1 \quad (\text{or}\ \ \det(A) = \pm 1)$$

を満たす範囲で、できるだけ大きな条件数を生成したい。ここで、μ は通常は 10^8, 10^{16}, 2^{53} といったかなり大きな正整数であるが、理論上は 2 とか 10 でもよい。

この問題に対しては Rump による先駆的研究があったが、本研究では Rump 法のいくつかの拡張及び、より簡単な生成法を提案した。

まず、A の固有値の分布と条件数の間の関係について考察し、特に特異値が対数的に等間隔で並ぶ場合など、特異値の分布が一様な場合には、条件数はあまり大きくならないことを解析的に示した。

大きな条件数の整数行列は「det(A)=1」のもとで考えるのが合理的である。本研究で提案した新しい生成法は次の形の行列を用いる。

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\sigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

ここでパラメータの決め方は「発表論文など」の文献(1)に詳しく述べている。

なお、「極めて大きな条件数の n 次行列」は、非常に大きな $n-1$ 個の特異値と、極めて小さな１個の特異値をもつことを示した。このことは、A^{-1} がランク１の行列に近いことを意味するので、必ずしもたちの悪い行列のベンチマーク行列として望ましいとはいえない。より妥当な特異値の分布としては

Case (i) $\sigma_1 = \cdots = \sigma_m \gg 1,\ \sigma_{m+1} = \cdots = \sigma_{2m} \ll 1$
Case (ii) $\sigma_1 = r\sigma_2 = r^2\sigma_3 = \cdots = r^{2m-1}\sigma_{2m}\ (r > 1)$
Case (iii) $\sigma_1 = \cdots = \sigma_l \gg 1,\ \sigma_{l+1} = \cdots = \sigma_{n-l} = 1,$
$\sigma_{n-l+1} = \cdots = \sigma_n \ll 1$

などが考えられる。そこで、本研究では、上記の３ケースについて、これらを実現する行列として

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

の形の行列を提案し、上記の３ケースを実現する B の定め方を与え、数値実験においても、理論と極めて良い一致を得た。

４－３）汎用回路解析プログラムなどにより得られた解の誤差の上界を回路構造から簡単に算出する方法を提案したこと(「５．主な発表論文等」の項の文献(4), (10), (12), (14), (16)参照)

線形連立方程式 $Ax=b$ 解 $\tilde{x}$ の典型的な精度保証法である大石法では、次のことを利用する。

残差ベクトルを次式で定義する。

$$r = [r_i] \equiv b - A\tilde{x}$$

補題１

$$||RA - I|| < 1$$

を満たす任意の実正方行列 R に対して

$$||x_* - \tilde{x}|| < \frac{||Rr||}{1 - ||RA - I||}$$

が成り立つ。ここで x_* は真の解を表す。

掃き出し法や LU 分解法などでは、数値解を求める段階で、A の近似逆行列が求まるので、これを R として使えば、(極めてたちの悪い方程式でない限り)補題１の仮定が通常成り立ち、したがって、上式から、解の上界が計算できる。

ところが、SPICE などの汎用の回路解析プログラムでの解析では、A の近似逆行列はも

とより、A そのものも陽には与えられない(回路の接続情報と素子値だけを与えればよいということは通常のユーザにとってむしろ望ましいことではあるが、解の精度保証などを検討する場合には計算過程など分からず、都合が悪い)。

ところで、抵抗値がすべて正、すなわち**受動抵抗回路**の場合については、節点方程式における係数行列が常にハイパードミナント行列であるという重要な性質がある。すなわち、係数行列を $A=[a_{ij}]$ とするとき、ドミナント条件:

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つ(実際には、上式で不等号のところはしばしば等号も入り、これで問題が難しくなる。このことについては後述)。

この場合には、近似逆行列として R を

$$R = \mathrm{diag}\,[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \cdots, \frac{1}{a_{nn}}]$$

と選ぶと、補題１の条件が自動的に満たされる。そこで

$$\begin{aligned} \eta_i &\equiv \frac{\sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|}{a_{ii}}, \ \ \delta_i \equiv 1 - \eta_i \\ \eta_{max} &\equiv \max_i \eta_i = \max_i \left\{ \frac{\sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|}{a_{ii}} \right\} (< 1) \\ \delta_{min} &\equiv 1 - \eta_{max} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - ||I - RA||} = \max_i \frac{\sum_{j=0; j\neq i}^{n} g_{ij}}{g_{i0}} \left(= \frac{1}{\delta_{min}} \right) \\ = \ & \max_i \frac{\text{Sum of conductances connecting to node } i}{\text{Conductance connecting nodes } i \text{ and } 0} \end{aligned}$$

となり、したがって結局

$$||x_* - \tilde{x}|| < \frac{||Rr||}{1 - ||RA - I||} = \frac{1}{\delta_{min}} ||Rr||$$

この式からさらに抵抗値(コンダクタンス値)を用いると次の結果が得られる。

$$||x_* - \tilde{x}|| < \max_i \frac{\sum_{j=0}^{n} g_{ij}}{g_{i0}} \cdot \max_i \left[\frac{|r_i|}{\sum_{j=0}^{n} g_{ij}} \right]$$

上記の評価式で重要なことは、分母や分子の計算がすべて正数の和であるから、桁落ちなどの心配がないことで、概算するくらいで十分であることである。

一方、上式の大きな欠点は、A においてドミナント条件が等号で成り立つ行が一つでもある、すなわち回路で言えば、コンダクタンスを介して接地点と直接つながっていない節点が一つでもあれば、$\delta_{min}=0$ となり、上の評価式が使えないことである。

この場合への対処法として、まず、行列 A の行や列間に演算を行い、ドミナント条件が不等号となるような計算法を与えた。しかし、このための計算量は大きく、また回路的解釈も明確でなかった。

そこで、研究期間の最終年度では、節点行列を用いるのではなく、一般のカットセット行列を用いることで、一般的でかつ回路的にも意味の明確な上界を与える式を導出した(発表論文の(4))。結果を大雑把に言えば、「**回路の各節点が(直接である必要はなく、いくつかのコンダクタンスを介して)かなり大きなコンダクタンスで互いに接続されていれば、真の解からの誤差はあまり大きくならない**」ことを定量的に示した。同時に、ある節点集合が他の節点集合と非常に小さなコンダクタンスでしか結合されていなければ、非常に大きな誤差が生じ得ることも示した。

以上は、受動回路の場合であったが、能動素子を含む場合は、さらに本質的な難しさが存在する。しかしながら、ある種の典型的な能動回路においては、上記と類似のドミナント性を満たし、受動回路のときの結果が流用できることを示した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

(1) Tetsuo Nishi, Siegfried M. Rump, and Shin'ichi Oishi, ``On the generation of very ill-conditioned integer matrices'', Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 査読あり、vol.2, pp. 226-245, April 2011

(2) Norikazu Takahashi, Ken Ishitobi and Tetsuo Nishi, ``Sufficient Conditions for One-Dimensional Cellular Neural Networks to Perform Connected Component Detection'', Nonlinear Analysis: Real World Appl. 査読あり、vo.11, no.5, pp.

4202-4213, Oct. 2010

(3) Yusuke Nakaya, Tetsuo Nishi, Shin'ichi Oishi, and Martin Claus, ``Numerical Existence Proof of Five Solutions for Certain Two-Transistor Circuit Equations'', Japan J. Indust. Appl. Math. 査読あり、vol.26, no.2, pp. 327-336, June 2009

〔学会発表〕(計 14 件)

(4) 西　哲生, 大石進一, ``線形受動抵抗回路の解の回路構造に基づいた精度保証について'', 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 査読なし、2011-01-25、(熊本大学)

(5) Tetsuo Nishi, Siegfried Rump and Shin'ichi Oishi, ``Generation Method of Extremely Ill-conditioned Integer Matrices, Proc. Nonlinear Theory and Its Appl, 査読あり、pp. 18-21, Sept. 5, 2010 (Krakow, Poland)

(6) Tetsuo Nishi, Siegfried M. Rump, and Shin'ichi Oishi, ``Some properties and generation methods of integer matrices with large condition number'', 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 査読なし、2010-06-21 (北見工大)

(7) Tetsuo Nishi, Siegfried Rump and Shin'ichi Oishi, ``Generation of some classes of ill-conditioned integer matrices'', International Workshop On Numerical Verification and its Application 2010 (INVA2010), 査読なし、March 10--15, 2010 , Hachijyo-jima

(8) Norikazu Takahashi and Tetsuo Nishi, ``Analysis of Signal Propagation in 1-D CNNs with the Antisymmetric Template'', Proc. 12th IEEE Internat'l Workshop on Cellular Nanoscale Networks, 査読あり、2010 年 2 月 3 日 (Berkeley, USA)

(9) Tetsuo Nishi, ``非常に大きな条件数をもつ整数行列の一生成法'', 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 査読なし、2010 年 1 月 29 日 (京大会館)

(10) Tetsuo Nishi, ``An Error Bound of a Solution for Linear Passive DC CircuitsWithout Constructing Circuit Equations'', Proc. 2009 Internat'l Symp. on Nonlinear Theory and its Appl. (NOLTA'09), 査読あり、2009 年 10 月 21 日 (Sapporo, Japan)

(11) Yusuke Nakaya, Tetsuo Nishi, ``Numerical Verification of Five Solutions in Two-transistor Circuits'', Proc. 2006 Internat'l Symp. on Nonlinear Theory and its Appl. (NOLTA'09) 査読あり、pp.663-666, 2009 年 10 月 21 日 (Sapporo, Japan)

(12) 西　哲生・大石進一・中谷祐介, ``能動素子を含むある種の抵抗回路の解の精度保証について", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, , 査読なし、2009 年 7 月 1 日, (釧路市生涯学習センター, 北海道)

(13) 西　哲生・中谷祐介・大石進一, ``行列式が 1 の 3 次整数行列の一生成法'', 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 査読なし、2009 年 1 月 23 日 (ホテルマリックス(宮崎))

(14) 大石進一・西　哲生・中谷祐介, ``線形抵抗回路の動作点の数値的精度保証法", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 査読なし、2009 年 1 月 23 日 (ホテルマリックス(宮崎))

(15) Tetsuo Nishi, ``A Method for the Generation of a Class of Ill-conditioned Matrices'', Proc. 2008 Internat'l Symp. on Nonlinear Theory and its Appl. (NOLTA'08), 査読あり、pp.53--56, Oct. 2008 (Budapest, Hungary)

(16) 西　哲生・中谷祐介・大石進一, ``線形受動抵抗回路の解の精度保証について", 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 査読なし、2008-10-14, (石巻専修大学, 宮城)

(17) Tetsuo Nishi, Takeshi Ogita, Shin'ichi Oishi, and S. Rump, ``Some Considerations on the Generation of Ill-conditioned Matrices'', International Workshop On Numerical Verification and its Application 2008 (INVA2008), 査読なし、March 2008, (Okinawa)

〔図書〕(計 1　件)
(18) 西　哲生, ``基礎としての回路'', コロナ社, 2008 年 4 月

６．研究組織

(1)研究代表者

西　哲生（NISHI TETSUO ）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：40037908

(2)連携研究者

高橋　規一（TAKAHASHI NORIKAZU ）

九州大学・大学院システム情報科学研究院・准教授

研究者番号：60284551

中谷　祐介（NAKAYA YUUSUKE　）

早稲田大学・理工学術院・准教授

研究者番号：80318807　(H20→21)