

自己評価報告書

平成 23 年 4 月 1 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2008～2011

課題番号：20684002

研究課題名（和文） 高次元極小モデル理論に現れる特異点の研究

研究課題名（英文） Study of singularities in the minimal model theory in higher dimension

研究代表者

川北 真之 (KAWAKITA MASAYUKI)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10378961

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：極小対数的食違い係数・Riemann-Roch 公式・モチーフ積分・極小モデル理論

1. 研究計画の概要

双有理幾何の標準理論は対数的極小モデルプログラム (LMMP) の形で定式化されている。その最重要な課題であるフリップの終止予想の視点から、LMMP の過程で現れる特異点の局所構造を極小対数的食違い係数に着目して研究する。それらの特異点は極小対数的食違い係数によって定義され、終止予想は極小対数的食違い係数の二つの局所問題、すなわち下半連続性及び昇鎖律に還元されるからである。

研究の指針となるのが、極小対数的食違い係数の上からの有界性問題である。極小対数的食違い係数の本質的な意義は、それが特異点の程度を反映する所で、特異点の程度が悪いほど係数が小さいことが経験から知られている。さらに係数の有界性は、終止予想の還元先である下半連続性と昇鎖律のどちらの系でもある。この問題を、特異点解消上の各例外因子に沿い適当な重複度を持つ関数の成す集合を解析する手法で研究する。

具体的方法として、まず Riemann-Roch 公式を応用し、特異点の超平面切断を考えることで低次元の分類論へ帰着させる。もう一つ、Mustață らのモチーフ積分論による極小対数的食違い係数の記述を発展させる。

2. 研究の進捗状況

極小対数的食違い係数の有界性問題は、簡単に Gorenstein 末端特異点の場合に帰着される。まず Riemann-Roch 公式の第一項に重複度が現れることを用いて、係数の有界性が重複度あるいは埋込次元が抑えられる時に従うことを示した。次いで公式第二項に標準因子との交点数が現れることを用いて、超平

面切断を繰返して得られる Gorenstein アルティン環を解析した。結果、Markushevich による 3 次元の係数の有界性を復元し、さらに 3 次元 Gorenstein 末端特異点の超平面切断が Du Val 特異点を持つと言う Reid の結果を、楕円特異点の性質を用いない簡単な方法で証明した。4 次元特異点についても部分的な結果を得た。

次いで Kollár 及び de Fernex, Ein, Mustață による対数的標準性のイデアル進半連続性の拡張として、極小対数的食違い係数のイデアル進半連続性問題を研究した。問題は、境界因子を微小変形させるときの極小対数的食違い係数の不変性である。多様体が川又対数的末端特異点を持つ場合は、容易に対数的標準性の結果へ帰着できる。難しいのは真に対数的標準特異点を持ちながら正の極小対数的食違い係数を持つ場合であるが、極限を扱うときには避けられない。手始めとして、純対数的末端特異点を持つ場合を考えた。一つの視点として逆同伴を経由すれば、川又対数的末端特異点の場合で、境界因子だけでなく多様体自身も微小変形させるときの問題でもある。この場合について、被約境界因子のヤコビアンに重複度が小さいことに着目し、モチーフ積分論を用いて係数のイデアル進半連続性を証明した。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

極小対数的食違い係数に着目する特異点の研究が、計画した二つの具体的方法である Riemann-Roch 公式とモチーフ積分論を用いる方法それぞれによって、一定の進展を遂げ

たからである。すなわち、前者の方法で有界性問題を低次元の場合に整理して証明し、その高次元化には特殊方向の超平面切断の構成が課題であることを提示した。一方後者の手法を微小変形問題に用いて、モチーフ積分論の極小対数的食違い係数への新しい応用を与えた。

4. 今後の研究の推進方策

極小対数的食違い係数を、対数的標準閾から回復させる手法及び係数を計算する因子を直接調べる手法の両面から研究する。

昨年度の純対数的端末特異点を持つ場合の係数のイデアル進半連続性の研究は、なお追及の余地がある。モチーフ積分論は極小対数的食違い係数を直接取り扱う目下の唯一の手法で、それによる係数の記述は係数の明示的有界性を反映しているからである。例えば因子端末特異点の場合の研究が考えられる。

一方で幾何的視点に帰れば、極小対数的食違い係数をいかに対数的標準閾から回復させるかが問題となる。Riemann--Roch 公式が導く情報も、係数自身よりもその重複度による商である対数的標準閾に関する情報であった。そこで、特異点解消写像は相対次元 0 の相対射ゆえ、Birkar、Cascini、Hacon、McKernan による LMMP の理論を用いて、特殊な例外因子のみが現れる部分特異点解消の構成を考えたい。

また Hacon、McKernan、Xu による対数的標準閾の昇鎖律の証明の最新報告もあり、その検証も必要かもしれない。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies by Riemann--Roch theorem, to appear in American Journal of Mathematics, refereed
- ② 川北真之, Problems on singularities from the theory of minimal models, 第 54 回代数学シンポジウム報告集, 47-54, 2009, 査読無
- ③ Masayuki Kawakita, On a comparison of minimal log discrepancies in terms of motivic integration, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **620**, 55-65, 2008, refereed

[学会発表] (計 9 件)

- ① Masayuki Kawakita, Singularities in the minimal model program, 5th Pacific Rim conference on mathematics, 1 July 2010, Stanford University, USA
- ② Masayuki Kawakita, On minimal log discrepancies, Invariants in algebraic geometry, 9 November 2009, University of Tokyo, Japan
- ③ 川北真之, Problems on singularities from the theory of minimal models, 第 54 回代数学シンポジウム, 3 August 2009, Meiji University, Japan
- ④ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, 1st Pacific Rim mathematical association congress, 10 July 2009, University of New South Wales, Australia
- ⑤ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, Geometry of algebraic varieties, 2 July 2009, Steklov Mathematical Institute, Russia
- ⑥ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, Hayama symposium on complex analysis in several variables XII, 15 July 2008, Japan

[その他]

ホームページ

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~masayuki>