

機関番号：14301

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2008～2010

課題番号：20684004

研究課題名（和文） 作用素環と離散群の双方向的研究

研究課題名（英文） A two-way study of operator algebras and discrete groups

研究代表者

小澤 登高 (OZAWA Narutaka)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：60323466

研究成果の概要（和文）：離散群、あるいはその確率空間への作用から作られる von Neumann 因子環の構造を調べ、分類した。また、離散群の解析的有限近似性について研究し、その結果を因子環の研究や、グラフの距離空間への埋め込み可能性問題などに応用した。

研究成果の概要（英文）：Ozawa studied the structure of von Neumann factors arising from discrete groups and their actions on probability spaces, and contributed to the classification theory of von Neumann factors. He also studied analytic approximation properties of discrete groups and applied them to the study of von Neumann factors and to the embedding problem of graphs into metric spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	1,080,000	4,680,000

研究分野：作用素環論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学（4105）

キーワード：作用素環、離散群、関数解析

## 1. 研究開始当初の背景

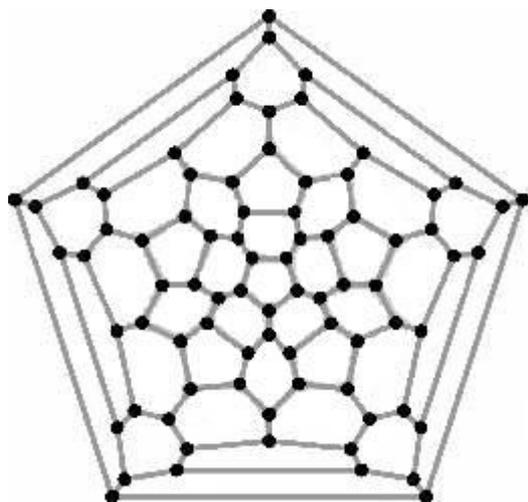
（離散）群とは、任意の対象の対称性を記述するための数学言語である。例えば、ある結晶が与えられたとき、その結晶構造を変えない変換（回転操作、鏡映操作、反転操作など）全体を考えたものが群である。人間には線形的な構造の方が理解しやすいので、群の各要素を適当な（線形）空間上の作用素とみなして取り扱うことにする。さらに、そうした作用素全体が生成する代数系を考え、適当な位相で完備化すれば作用素環と呼ばれる対象ができる。位相の存在により、群論のような

代数的な問題に対しても解析的なテクニックを使えるところが作用素環論の特徴である。

作用素環の研究はそもそもは、John von Neumann が量子力学の数学的取り扱いを目指して始めたものであったが、現在では数理解論だけでなく、幾何学、群論、エルゴード理論などに幅広い応用がある。

無限離散群を関数解析的に取り扱う際には、大抵、適当な意味で有限近似をする必要がある。中でも最も重要な概念が「従順性 (amenability)」である。実際、離散群一般

に対して函数解析と関連した問題を考えるとき、従順な群では振る舞いが礼儀正しいが、そうでない群はひどくワイルドであるという極端な dichotomy に出会うことがしばしばある。従順群のクラスは可解群や劣指數的増大群を全て含み、部分群、商群、群拡大などの操作で不変なそれなりに大きいクラスであるが、非可換な自由群などの、従順ではないが重要な群も多く存在する。理論的にも応用の上でも、そうした群を扱うことはじゅうようなので、より広い対象を扱えるよう、従順性を弱めた概念を考える必要性が出てきた。



離散群に関する解析学は我々の日常生活にも関与している。非常に高い連結性を持ちながらも、辺の数が少ない有限グラフのことをエクスペンダーと呼ぶ。(上図は 80 個の頂点からなる平面エクスペンダーである。どのような 10 個の頂点を取り除いても、一番大きい連結成分は 40 個以上の頂点からなる、などといった性質を持ち、強靱なネットワークであると言える。) エクスペンダーは、作用素環論を含む「純粹」数学において重要なだけでなく、理論計算機科学、ネットワーク理論、誤り訂正符号理論などの「応用」数学に対する応用も豊富である。いくらでも大きなサイズのエクスペンダーが存在すること自体は古くから知られていたが、初めて具体的に構成したのは G. Margulis (1973) である。その構成には群の解析学(表現論)における深甚な定理が使われている。Margulis の手法(あるいはその改良)によればエクスペンダーを作るには Kazhdan の性質(T)を持つ群が必要である。Kazhdan の性質(T)は従順性の対極に位置する群の性質であるが、そうした性質を持つ群が存在すること自体、極めて非自明な事実である。Kazhdan の性質(T)を持つ群は他にも興味深い挙動を示すため、さらなる研究が望まれる。

## 2. 研究の目的

(1) 中心が自明な von Neumann 環は因子環と呼ばれる。一般に von Neumann 環は中心に沿って因子環の「直積分」に分解できるので、von Neumann 環の研究においては、因子環の研究が重要である。1943年に Murray と von Neumann は、離散群やその確率空間への保測作用から、因子環を構成できることを発見し、その分類問題を提起した。しかし 因子環の分類は、ワイルドな問題であって、完全に分類することはそもそも「原理的に不可能」だとされている。それでも出来る限り見分けてみようというのが因子環分類問題の主旨である。この分野はエルゴード理論における軌道同値関係の理論や、集合論における分類理論・記述集合論、それに測度論的群論と最近名付けられた分野と密接な関係があり、近年急速に進歩した。本研究の目的のひとつ離散群、あるいはその確率空間への保測作用から作られる因子環の構造を調べ、分類することにある。

(2) 離散群の解析的有限近似性について調べる。特に従順性を弱めた弱従順性について詳しく研究し、どのような群が弱従順性を持つか、また弱従順性を持つ群はどのような特徴を持つかを調べる。他にも、有限近似性の正反対の性質である Kazhdan の性質(T)等についても同様の研究をする。さらに、その結果を(1)の因子環の研究や、グラフの距離空間への埋め込み可能性問題などに応用する。

## 3. 研究の方法

個人で行う日常の研究はもちろん重要であるが、数学研究においては他の研究者と着想を交換することも極めて重要である。そのため、国内外の研究集会に積極的に参加し、研究成果の発表、参加者との研究連絡、最新の研究動向についての情報交換等を行う。また、研究集会以外にも、共同研究者としばらくの期間同じ場所に滞在し、落ち着いた環境で共同研究を行う。その他、書籍や会議録は適宜購入する。

## 4. 研究成果

UCLA の S. Popa 教授と共同で、部分 von Neumann 因子環の正規化群の研究を行い、いくつかの重要な結果を得た([6])。特に、自由群因子環の従順な部分因子環の正規化群が生成する因子環は再び従順となることを示した。自由群因子環は従順でない因子環のなかで最もよく研究されている対象であり、この結果は著名な Voiculescu の定理(1996)と私の定理(2004)をまとめて強化するものである。離散群の確率空間への保測作用から接合積により群測度因子環を構成できる。軌

道同型な群作用からは同型な因子環ができることが昔から知られているが、その逆は一般的には成り立たない(Connes—Jones 1982)。我々はその逆が成り立つ初めての例を示した。別の論文[5]において結果を拡張し、実階数1の連結単純Lie群の格子を含む広いクラスにおいても同様の結果が成り立つことを示した。これらの研究では、扱う群が弱従順性という性質を持つことが本質的に使われている。

論文[8]と[2]において弱従順性の研究を行い、弱従順性が双曲群という良いクラスの群について成り立つこと、弱従順性を持つ群はある種の部分群の構造に強い制約を持つこと、特にあるクラスの群は従順性を持たないことを示した。この2つの論文を合わせて、80年代にHaagerupらがLie群論・実解析を駆使して得た弱従順性に関する一連の結果を、(函数解析的)群論の枠組みで再編・拡張した。

論文[1, 3, 4]では離散群の摂動あるいは変形に対する剛性の有無についての研究を行った。EPFLのN. Monod教授との共同研究である論文[4]ではDixmierの相似問題(1950)に挑戦し、部分的な解答を得た。考えている群が従順ならば、任意の一樣連続な表現はユニタリ表現の変形になることが知られているが、その逆も成り立つかを問うのがDixmierの相似問題である。論文[4]では特に、この問題の試金石とされていた自由Burnside群(従順でないことが知られている)にユニタリ化できない一樣連続な表現が存在することを示した。論文[3]では、Kazhdanの性質(T)に関連した研究を行った。Kazhdanの性質(T)は従順性の対極に位置する群の性質であるが、それを強めたものにBurger—Monodの性質(TT)がある。私は、それをさらに強めた性質(TTT)を導入し、 $SL(n>2, \mathbf{R})$ とその格子がこの性質(TTT)を持つことを示した。この定理の帰結として、これらの格子から従順群あるいは双曲群への擬順同型は自明なものに限ることが示される。ETHZのM. Burger教授、及びLeipzig大学のA. Thom准教授との共同研究である論文[1]では、離散群のユニタリ表現の摂動に関するUlamの問題(1960)に取り組み、いくつかの特殊な場合を除いて、満足のいく解答を得た。特に高階数格子の場合については、論文[3]において研究した性質(TTT)が有効に使われている。

手短に纏めると、本研究の結果、積年の未解決問題の(部分的な)解決([4, 5, 6])や、今後の研究に繋がる新しい現象の発見([1, 2, 3, 8])、興味深い例の構成([2, 7])など当初の計画では予見されていなかった大きな研究成果が得られた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件) すべて査読有

- [1] M. Burger, N. Ozawa and A. Thom; On Ulam stability. Israel J. Math., accepted.
- [2] N. Ozawa; Examples of groups which are not weakly amenable. Kyoto J. Math., 52 (2012), 333--344.
- [3] N. Ozawa; Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets. J. Reine Angew. Math., 655 (2011), 89--104.
- [4] N. Ozawa and N. Monod; The Dixmier problem, lamplighters and Burnside groups. J. Funct. Anal., 258 (2010), 255--259.
- [5] N. Ozawa and S. Popa; On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra II. Amer. J. Math., 132 (2010), 841--866.
- [6] N. Ozawa and S. Popa; On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra. Ann. of Math. (2), 172 (2010), 713--749.
- [7] N. Ozawa; An example of a solid von Neumann algebra. Hokkaido Math. J., 38 (2009), 557--561.
- [8] N. Ozawa; Weak amenability of hyperbolic groups. Groups Geom. Dyn., 2 (2008), 271--280.

[学会発表] (計20件)

発表者名 すべて N. Ozawa

- (1) “ME embeddings for groups”  
Embeddings workshop, Isaac Newton Institute, 14 January 2011.
- (2) “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets”  
AMS Fall Western Section Meeting, UCLA, 9 October 2010.
- (3) “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets”  
Actions and Invariants of Residually Finite Groups: Asymptotic Methods, Oberwolfach, 9 September 2010.
- (4) “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets”  
Satellite Conference on Operator Algebras to ICM 2010, IMSc (Chennai), 10 August 2010.
- (5) “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets”  
Recent Developments in Operator Algebras, University of Tokyo, 25

- June 2010.
- (6) “Dixmier’s Similarity Problem”  
KOTAC 2010, Incheon, 17 June 2010.
- (7) “Closable derivations on finite von Neumann algebras”  
Noncommutative Geometry and Operator Algebras, Vanderbilt University, 16–19 May 2010.
- (8) “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets”  
Danish–Norwegian Operator Algebra Seminar, University of Copenhagen, 9 April 2010.
- (9) “Dixmier’s Similarity Problem”  
Operators and Operator Algebras, University of Edinburgh, 11 December 2009.
- (10) “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets”  
Rigidity in cohomology, K-theory, geometry and ergodic theory, HIM (Bonn), 23 November 2009.
- (11) “Dixmier’s Similarity Problem”  
Geometry and Rigidity of Groups, Münster, 28 August 2009.
- (12) “von Neumann algebras and ergodic theory of group actions”  
Ergodic Theory of Group Actions, Göttingen, 17–20 August 2009.
- (13) “Hyperlinearity, sofic groups and applications to group theory”  
Operator Spaces and Approximation Properties of Discrete Groups, Texas A&M University, 3–5 August 2009.
- (14) “Dixmier’s Similarity Problem”  
Noncommutative  $L_p$  spaces, operator spaces and applications, CIRM, 8 June 2009.
- (15) “On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra”  
von Neumann Algebras and Ergodic Theory, UCLA, 18 March 2009.
- (16) “von Neumann algebras and ergodic theory of group actions”  
von Neumann algebras and Ergodic theory and Geometric Group theory, IMSc (Chennai), 2–13 February 2009.
- (17) “On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra”  
Harmonic analysis, operator algebras and representations, CIRM, 10 November 2008.
- (18) “On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra”  
von Neumann Algebras and Ergodic Theory of Group Actions, Oberwolfach,

- 26 October – 1 November 2008.
- (19) “On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra” ·  
Analytic Properties of Infinite Groups, Genève, 25–29 August 2008.
- (20) “On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra” ·  
Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Probability, Będlewo (Poland), 17–23 August 2008.

〔図書〕 (計 1 件)

N. Brown and N. Ozawa;  $C^*$ -algebras and finite-dimensional approximations. Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, 2008, 509 pp.

〔その他〕

ウェブサイト

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/>

ウェブサイトでは自分の研究成果、研究紹介のほか、参加した研究集会の報告、講義録などを公開している。

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小澤 登高 (OZAWA Narutaka)  
京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号：60323466

### (2) 研究分担者：なし