

機関番号：11301

研究種目：若手研究 (A)

研究期間：2008～2010

課題番号：20686026

研究課題名 (和文) 多端子量子通信ネットワークの理論的解析

研究課題名 (英文) Analysis on multi-terminal quantum network

研究代表者

林 正人 (HAYASHI MASAHIRO)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：40342836

研究成果の概要 (和文)：

量子系での多端子のネットワークにおいて、量子的な効果を用いた通信を行うには、それらの端子間での量子もつれ状態の活用が不可欠である。本研究では、多端子間での量子もつれ状態の識別、定量化、分類、変換可能性を扱った。さらに一入力多出力の量子通信路でも有効に働く量子通信路のユニバーサル符号を与えた。

研究成果の概要 (英文)：

In order to treat quantum advantage of multi-terminal quantum network, it is essential to use the quantum entanglement state among multi-terminal. In this research, I treated the distinguishability, the quantification, the classification, and the convertability for the quantum entanglement state among multi-terminal. Further, I showed the existence of the universal coding for quantum channel that well works for the one-input and multi-output case.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	5,000,000	1,500,000	6,500,000
2009 年度	4,600,000	1,380,000	5,980,000
2010 年度	5,000,000	1,500,000	6,500,000
年度			
年度			
総計	14,600,000	4,380,000	18,980,000

研究分野：量子情報理論

科研費の分科・細目：電気電子工学 通信・ネットワーク工学

キーワード：量子もつれ状態，多コピー変換可能性，多端子系，確定的 LOCC 変換可能性，確率 LOCC 変換可能性，ユニバーサル符号化

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 量子系での多端子のネットワークにおいて、量子的な効果を用いた通信を行うには、それらの端子間での量子もつれ状態の活用が不可欠である。しかも、量子もつれ相関は相関が無いところから生じることはない。そのため、多端子間の量子もつれは、そのようなネットワーク情報処理の貴重な資源となる。資源の有効活用のために、どのようなタ

イプの量子もつれ状態からどのようなタイプの量子もつれ状態が変換可能であるか調べておく必要がある。

しかしながら、研究開始時には、2端子間の量子もつれについては、十分な研究成果が知られていたが、多端子の場合については、部分的には知られていることが多いもの、全体として、不明確な点が多かった。そのため、多端子間の量子通信ネットワークにおいて、

どのようなことがどの程度可能であるか不明であった。

(2) 一方、もう1つの多端子系での量子通信の問題として、1入力多出力の量子通信の場合に、同一情報を拡散して伝送する問題がある。この場合、複数の通信路を用いて同時に伝送することが求められるため、通信の形に依存しない符号化法が求められる。そのような符号化法はユニバーサル符号と呼ばれ、古典通信の場合には、Csiszar-Kornerらによって、タイプ理論を用いて示されている。しかし、量子通信の場合には、示されていない。

## 2. 研究の目的

以上の、経緯により、本研究の目的は以下の2点に要約される。

(1) 多端子のネットワークの性能を明らかにするために、多端子系の量子もつれについて調べる。

(2) 量子通信におけるユニバーサルな符号化の存在を示す。

## 3. 研究の方法

(1) 多端子系の量子もつれ：

①多端子系の量子もつれ状態の識別可能性を扱うために、置換対称性に注目した。

②多端子系の量子もつれ状態の定量化を扱うために、局所ユニタリによる対称性に注目した。

③多端子系の量子もつれ状態の変換可能性を扱うために、3種類の変換可能性に注目した。

④三端子系の量子もつれ状態の分類を扱うために、Petzによる、量子相対エントロピーの単調性不等式の等号成立条件を用いた。

(2) 量子通信路ユニバーサル符号化：

古典通信におけるユニバーサル符号に関しては、タイプ理論が大きな役割を果たしたことは既に述べた。量子通信においても、ユニバーサル符号を考えるためには、タイプ理論の量子論的な対応物が必要となる。タイプ理論とは、古典系における置換群の作用による対称性をベースにした理論である。本研究では、量子系でのタイプ理論の対応物として、置換群とユニタリ群の表現論に注目することにした。これらの群の既約分解をベースに、量子系でのタイプ理論の対応物を構築することで、量子通信のユニバーサル符号について扱った。

## 4. 研究成果

(1) 多端子系の量子もつれ：

①多端子系の量子もつれ状態の識別可能性：多端子系の量子もつれ状態の識別可能性は、幾何学的測度で与えられることが知られて

いた。本研究では、この事実に注目して、幾何学的測度の計算について、端子間の置換に関して不変である場合に、著しく単純化する公式を導出した。そして、この公式を用いることで、この量について加法性について調べた。その結果、係数が正值となる場合について、加法性が成り立つことを示した。この成果を用いて、Dicke 状態、最大相関ベル基底状態、Smolin 状態、Dur 状態の場合に加法性が成り立つことを示した。

一方、係数が正值とならない場合についても考察し、そのような場合には、加法性が成り立たないことの方が一般的であることを確率的手法を用いて示した。特にその典型例として、反対称状態に注目した。この場合に、2 コピー状態の幾何学的測度と1 コピー状態の幾何学的測度について計算し、両者を比較することで、加法性が成り立たないことを具体的に示した。

この事実は、ほとんどの場合2 コピー状態は幾何学的測度の意味で、エンタングルメントが小さいことを示している。一方、先行研究により、ほとんどの量子状態はエンタングルが強すぎて1 方向量子計算と呼ばれる多端子量子情報処理には向かないということが指摘されている。そのため、2 コピー状態を用いると、エンタングルメントの度合いが抑制でき、1 方向量子計算に適していることが期待できる。

②多端子系の量子もつれ状態の定量化：

置換不変性とは別に、局所ユニタリによる対称性に注目し、Dicke 状態、反対称状態についてエンタングルメント相対エントロピーが幾何学的測度に等しいことを示した。さらに、これらのエンタングル状態の場合に、上記の値がエンタングルメント大域的頑強性対数とも等しいことを示した。

さらに、Dicke 状態について、幾何学的測度が加法性を満たすことを用いて、この値が、漸近的エンタングルメント相対エントロピーに等しいことを示した。一方、反対称状態については、2 コピー状態のエンタングルメント相対エントロピーを求め、この場合について、加法性が成り立つことに注意し、漸近的エンタングルメント相対エントロピーを求めた。

また、最大相関ベル基底状態、Dur 状態、Smolin 状態、等方的状態の場合は、純粋状態で無いため、幾何学的測度はエンタングルメント相対エントロピーやエンタングルメント大域的頑強性対数と一致しない。これらの状態の場合について、局所ユニタリによる対称性を満たすことを示し、幾何学的測度を用いてエンタングルメント相対エントロピーを求めた。

さらに、Smolin 状態、等方的状態の場合に

については、エンタングルメント大域的頑強性対数についても、この方法で具体的に値を求めた。

③多端子系の量子もつれ状態の変換可能性：

多端子系の量子もつれ状態を純粋状態の場合に変換可能性の観点から特徴づけた。具体的には3種類の変換可能性に注目し、これらの変換可能性の間の関係を明らかにした。3種類の変換可能性とは、多コピー変換可能性、確率的 LOCC 変換可能性、確定的 LOCC 変換可能性の3つの変換可能性である。これらの変換可能性には強弱があり、多コピー変換可能性が弱く、その次に確率 LOCC 変換可能性が弱い。すなわち、多コピー変換可能である場合は、確率的 LOCC 変換及び、確定的 LOCC 変換が可能である。特に最も弱い変換可能性である多コピー変換可能性については、端子間の量子もつれを表すグラフを用いて分類可能であることを示した。また、確率 LOCC 変換可能性とテンソルランクとの関係を明らかにした。具体的には、テンソルランクと局所ランクから確率 LOCC 変換可能性が完全に決まる場合と、テンソルランクと局所ランクだけから確率 LOCC 変換可能性が完全に決まらない例があることを明らかにした。例えば、テンソルランクと全ての局所ランクが等しい場合、すべての状態は互いに、確率 LOCC 変換可能である。しかし、1つの系の除くすべての系で局所ランクがテンソルランクに等しく、その1つの系での局所ランクがテンソルランクよりも1つ小さい場合は異なる。この場合、その系の局所ランクの数の確率 LOCC 変換可能で移りあわない部分集合に分かれる。また、3体系の場合には、これ以外の場合にも、与えられたテンソルランクと局所ランクの下で、複数の確率 LOCC 変換可能な軌道に分かれることを示した。さらに、テンソルランクと全ての局所ランクが等しい場合であっても、全ての状態は確定的 LOCC 変換可能とは限らないことも示した。

④三端子系の量子もつれ状態の分類：

さらに、三端子系の量子もつれ純粋状態については、より詳しい分類が可能である。そのために二端子系の量子もつれ混合状態について、以下の5種類に分類できる。

(S)セパラブル状態

(P)非セパラブル部分転置正状態（セパラブルでは無いが、部分転置が正行列となる状態）

(N)非部分転置正かつ蒸留不能状態（部分転置が正行列とならないが、蒸留が不能な状態。このような状態の存在の有無は分かっていない。）

(D)蒸留可能縮約状態（蒸留可能であるが、

エンタングルメントに関する縮約基準を満たす状態）

(M)非縮約状態（縮約基準を満たさない状態）

従って、三端子系に上記の分類を適用すると、3種類の2端子系の選択があるため、5の3乗種類への分類が考えられる。5の3乗は125であるが、本研究は、そのうち、21種類しか存在しえないことを示した。そのうち、18種類については、それに該当する状態が存在することを示した。すなわち、残りの104種類が存在しないことを示した。そのような104種類が存在しないことは以下の1つの主張にまとめる事ができる。

三端子系の純粋状態が与えられたとき、ある二端子の間での状態が蒸留不能であるとき、残りの二種類の二端子の間での状態はセパラブルとなるか非縮約状態となるかのどちらかである。特にこの場合、条件付きエントロピーが負となる。

この事実から以下の事実を導くことができる。二端子系の状態が利用できない（蒸留できない）エンタングル状態である場合、それぞれの系と環境系との間の状態の条件付きエントロピーが負となる。

条件付きエントロピーが負であると、比較的容易なプロトコルにより、エンタングル状態を蒸留することができる。

この主張は単婚性の逆とも言える性質であり、弱い種類のエンタングルメントが、他の組み合わせについて、より強いエンタングルメントを保証している。

この性質は、今後、エンタングルメントを用いたプロトコルを開発するために有益な情報を与えると思われる。

なお、上記の主張を示すために、Petzによる、量子相対エントロピーの単調性不等式の等号成立条件を用いた。

(2)量子通信路ユニバーサル符号化：

量子通信路を用いて古典情報を伝送する問題について、通信路に依存しない符号化、復号化の対を与えた。

このために、表現論の Schur 双対とよばれる理論に注目し、この理論を用いて、量子状態の漸近的なユニバーサルな近似を考えた。ユニバーサルな近似をベースに、どのような量子通信路でも有効に働く量子復号化を与えた。

さらに、ランダム符号化の平均性能とほぼ同等の性能を持つ符号が存在することを示した。これらを組み合わせることで、量子通

信路のユニバーサル符号を与えた。

なお、本研究成果では、日本 IBM 科学賞、船井学術賞を受賞し、高い評価を得ている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 22 件)

1. Masahito Hayashi, Lin Chen, "Weaker entanglement between two parties guarantees stronger entanglement with a third party", 査読あり, Physical Review A, Vol.84, 012325, 2011.
2. Lin Chen, Masahito Hayashi, "Multi-copy and stochastic transformation of multipartite pure states," 査読あり Physical Review A, Vol.83, 022331, 2011.
3. Huangjun Zhu, Lin Chen, M. Hayashi, "Additivity and non-additivity of multipartite entanglement measures", 査読あり New Journal of Physics, Vol.12, 083002, 2010, DOI:10.1088/1367-2630/12/8/083002
4. M. Hayashi, "Group theoretical study of LOCC-detection of maximally entangled state using hypothesis testing" New Journal of Physics. Vol.11, No.4, 043028, 2009 査読あり doi:10.1088/1367-2630/11/4/043028
5. M. Hayashi, "Universal coding for classical-quantum channel" 査読あり Communications in Mathematical Physics. Vol.289 No.3 1087-1098, 2009, DOI: 10.1007/s00220-009-0825-1
6. M. Hayashi, D. Markham, M. Muraio, M. Owari, S. Virmani "The geometric measure of entanglement for a symmetric pure state with non-negative

amplitudes " 査読あり Journal of Mathematical Physics Vol.50, No.12, 122104 2009 doi:10.1063/1.3271041

[学会発表] (計 60 件)

1. 林正人, 陳霖, Classification of pure tripartite states by reduced bipartite densities, [第24回量子情報技術研究会 (QIT24)] (2011年5月12日~2011年5月13日, 東京工業大学大岡山キャンパス)
2. 陳霖, 林正人, Multi-copy and stochastic transformation of multipartite pure states, [第24回量子情報技術研究会 (QIT24)] (2011年5月12日~2011年5月13日, 東京工業大学大岡山キャンパス)
3. H. Zhu, L. Chen, M. Hayashi, Additivity and non-additivity of multipartite entanglement measures [The 10th Asian Conference on Quantum Information Science (AQIS'10)] (2010年8月27日-2010年8月31日, 日本国, Tokyo) ポスター (一般)
4. H. Zhu, L. Chen, M. Hayashi, Additivity and non-additivity of multipartite entanglement measures [The Tenth International Conference on Quantum Communication, Measurement and Computation (QCMC)] (2010年7月19日-2010年7月23日, オーストラリア, Brisbane) ポスター (一般)
5. M. Hayashi, Quantum Universal Coding Protocols and Universal approximation of multi-copy states [International Conference on Quantum Information and Technology] (2009年12月2日-2009年12月5日, 日本国, 東京) 口頭 (招待・特別)
6. M. Hayashi, Quantum universal coding protocols and universal approximation

of multi-copy states[The 6th  
Jointmeeting of Chinese Physicist  
Worldwide (OCPA6)](2009年8月3日\_-  
2009年8月7日, 中国, LanZhou) 口頭(招  
待・特別)

7. M. Hayashi, Universal information  
protocols in quantum information  
theory[Information and Communication,  
Alfred Renyi Institute of Mathematics,  
Hungary](2008年8月25日\_- 2008年8月28  
日, ハンガリー, Budapest) 口頭(招待・  
特別)

[図書](計0件)

[産業財産権]

○出願状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

[http://www.ims.is.tohoku.ac.jp/~q-lab/i  
ndex.html](http://www.ims.is.tohoku.ac.jp/~q-lab/index.html)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

林 正人 (HAYASHI MASAHIRO)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：40342836