

機関番号： 12401
 研究種目： 若手研究 (B)
 研究期間： 2008 ～ 2010
 課題番号： 20700005
 研究課題名 (和文) 計算機援用によるアルゴリズムの性能保証
 研究課題名 (英文) Computer-Aided Analysis and Design of Algorithms

研究代表者
 堀山 貴史 (HORIYAMA TAKASHI)
 埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
 研究者番号： 60314530

研究成果の概要 (和文)：

本研究の成果は、主に以下の3つからなる。(1) 逆算法による詰将棋の列挙アルゴリズムを設計し、与えられた駒に対する最長手数に関する証明が可能となった。(2) 逆探索により、p4 タイリング (90度回転によるタイリング) および p6 タイリング (60度回転によるタイリング) の基本図形を生成するアルゴリズムを設計した。(3) 正多面体の展開図の列挙アルゴリズムを設計し、「正多面体の任意の展開図は重なりを持たない」との定理を証明することで数百年に渡る未解決問題を解決した。

研究成果の概要 (英文)：

This research project has the following three main results. (1) We have designed algorithms for enumerating Tsume-Shogi by the reverse method. As a result, we can prove the longest mating-moves for a given set of Shogi-pieces. (2) We have designed algorithms for generating fundamental domains of p4-tiling (i.e., the tiling by 4-fold rotation) and p6-tiling (i.e., the tiling by 6-fold rotation) based on the reverse search. (3) We have designed algorithms for enumerating the unfoldings of polyhedra. By enumerating all unfoldings and checking their overlapping, we have solved an open problem for hundreds of years: Is every edge-unfolding of Platonic solids nonoverlapping? The answer is yes!

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	300,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,000,000	330,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野： 総合領域

科研費の分科・細目： 情報学・情報学基礎

キーワード： アルゴリズム理論、理論的性能保証

1. 研究開始当初の背景

情報化社会の大規模化と多様化は、計算機による処理能力の向上と処理対象への柔軟な適用によるところが大きい。これは、スーパーコンピュータやパーソナルコンピュー

タの処理速度の向上に顕著に見られるハードウェアの進歩に加えて、ソフトウェアのアルゴリズム革新に支えられている。例えば、社会の様々な最適化問題に応用されている線形計画法が初めて計算機上で実行された時に比べて、現在ではハードウェアによる

800倍とアルゴリズムの改良による2,360倍、合計で約1,900,000倍の高速化が達成されている。こうして、アルゴリズムの設計と理論的な性能保証が、あらゆる分野の基礎として重視されてきている。

さらに近年では、従来からの主眼である「正確な計算を限られたメモリ量で速く」だけでなく、情報の不完全性をいかに扱うかが課題となっている。このため、将来の入力が分からない状況下での時々刻々の最適化や、最適解に近い解が得られることを保証した近似最適化、確率モデルを導入した確率的な最適化といった観点からアルゴリズム設計が提案されている。また、与えられた条件を満たす解を1つだけではなく、すべて列挙するとの観点からのアルゴリズム設計も求められている。これらの品質保証には、理論的な性能解析が必要不可欠であるが、アルゴリズム設計と同じく人手で行っており、設計者の職人芸的なセンスに依存するところが大きい。

2. 研究の目的

本研究の主題は、アルゴリズムの設計と解析における計算機援用のパラダイムを確立することにある。ソフトウェア設計やVLSI設計の分野において大きな成功を収めているように、計算機援用は定型的作業の負荷を減らし、思考の抽象度を高めることによる生産性の向上が期待できる。また、解析方法が分かっているにもかかわらず、その手数が複雑で人手ではそのすべてを追うことができない場合、すなわち考慮されていない入力に対する想定外の劣悪な計算結果が大きな被害をもたらす場合にも、計算機援用は有効である。

具体的なテーマとして、研究代表者は、将来の入力が分からない状況下での最適化をモデル化したオンライン問題に取り組んできた。たとえば、インターネット規模の通信経路設計や市場における商品供給のような時々刻々と変動する系に対しては、最適計算に必要な入力データそのものが不十分な形でしか得られない。将来の入力の変動が予測できない条件のもとで、自分にとって都合の良い将来だけでなく都合の悪い将来であっても有益な結果をもたらすべく、現在の行動を決定するアルゴリズムを設計する必要がある。

たとえば、交換可能オンラインナップザック問題では、性能保証としての競合比が1.334(上限)を与えるアルゴリズムが既に提案されており、また(問題の本質的な難しさとして)競合比の下限1.281が知られていたが、上下限にはまだ隔たりがあった。競合比1.334のアルゴリズムの解析には、人手による13通りの場合分けがされており、この

競合比をさらに下げられるためには膨大な場合分けによる解析が必要であろうと予測されていた。

研究代表者は計算機の援用による証明を採用し、有限の資源しか持たない計算機の上で数値の無限性を扱うための種々のアイデアを提案した。これにより、まずは28状態の状態遷移からなる自動状態解析とそのすべての遷移を考慮した自動競合比解析を実現し、上限1.334の保証に成功した。この手法をさらに拡張し、276状態の状態遷移の自動生成と1,715種の連立不等式系による競合比の保証を行い、競合比1.301のアルゴリズムを設計した。別の手法により、下限が1.301であること、すなわちアルゴリズムの最適性も示している。

本研究では、このオンラインアルゴリズムの性能解析で得られた知見をもとに、アルゴリズムの性能保証における計算機援用について考察を深める。たとえば、列挙アルゴリズムの設計技法との融合により、対象の数が膨大なものの効率的な数え上げ生成による証明の枠組みへと発展させる。

より具体的には、状態の列挙による証明のゲーム理論への応用として、詰将棋の列挙による証明に取り組む。また、タイリング問題への応用として、回転対称を利用したタイリングの列挙による証明に取り組む。さらに、多面体、特に正多面体の展開図の列挙による証明に取り組む。こうした個々の問題において得られた知見をもとに、アルゴリズムの設計と解析における計算機援用のパラダイムを確立する。

近年、アルゴリズムの工学的側面を研究するアルゴリズムエンジニアリングが盛んである。性能を実験的に確認する手法も大いに発展したが、その結果、ベンチマーク例題から外れたところで思いもよらない性能の劣化が観測される等、例題の妥当性の問題に遭遇することになった。結局、シミュレーションによる実験は万能でなく、普遍的な性能保証を数学的に厳密な形で行うことの重要性が再認識されたのである。

理論的証明における計算機援用として、1,482個の不可避配置問題に帰着してこれを計算機により解いた、四色定理の証明(100年以上の未解決問題であった)が有名である[Appel, Haken, 1977]。他にMAX 2-SATやMAX-DICUTの近似アルゴリズム[Feige, Goemans, 1995][Goemans, Williamson, 1995]やMAX 3-SATの近似アルゴリズム[Karloff, Zwick, 1997]、ケプラー予想の証明[Hales, 1997]等で用いられている。本研究では、個々の問題への援用のみならず、理論的な性能保証における計算機援用の一般的な枠組みの確立を目標とすることに特色を持つ。

3. 研究の方法

研究目的に挙げた具体的なテーマに沿って、計算機援用の枠組みを発展させていく。計算機援用による性能保証として、膨大な数の列挙による証明への応用が主眼となる。これまでに、相互排除問題への計算機の援用が試みられ、有名な Peterson のアルゴリズム [Peterson, 1981] を含む 105 個の正しいアルゴリズムの列挙に成功した例が知られている [Bar-David, Taubenfeld, 2003]。また、数独パズルにおいて、インデックス番号からそれに対応する解への変換アルゴリズムが提案され、 6.7×10^{21} 通りの解の索引作りに成功している [Togami, Watanabe, 2007]。

本研究では、まず、人間の芸術的創作活動の一つである詰将棋の列挙に取り組む。一般に、将棋の局面は 10^{220} 以上もの膨大な数になると言われ、計算機による列挙には困難がともなう。この問題に対し、詰め上がりの局面 (詰め上がり図) から逆算法により 1 手詰め、3 手詰め、5 手詰めと手順を遡ることで詰将棋の局面を列挙するアルゴリズムの設計と、計算機による具体的な列挙実験を行う。この列挙実験の結果として、指定された駒のみを用いた詰将棋の中で最長の手数を証明することができる。

また、タイリング問題として、回転対称によるタイリングのための基本図形を生成するアルゴリズムの設計に取り組む。ここで、タイリングとは、基本図形に回転移動等の単純な操作を繰り返し適用することで、隙間なく重なりなく平面を敷き詰めることである。タイリングは、アルハンブラ宮殿の壁面装飾やエッシャーの絵画、正倉院裂等の織物のデザイン、その他にも着物やカーテン、壁紙などの工業デザインなど多岐に渡って利用されている。本研究では、逆探索により基本図形を効率的に生成するアルゴリズムの設計とその性能評価を行う。

さらに、多面体、特に正多面体の展開図の列挙による証明に取り組む。展開図の起源は、画家であり数学者であるデューラーが 1525 年に正多面体等の展開図を与えた “*Untersuchung der Messung mit dem Zirkel un Richtscheyt in Linien Ebenen und Gantzen Corporen*” (測定法教則) に遡る。「任意の凸多面体は、単純で重ならない多角形に展開することができるだろうか？」は、この頃からの有名な未解決問題である。任意の展開が重ならないだろうという直感は、長年に渡り支持されてきたが、近年になって、開切の仕方によっては開いた面が重なりを持ち得る不幸な反例が示された [Namiki ら, 1993]。また、凸性を考慮に入れなければ、どのように展開しても重なりを持ってしまう多面体が報告

されている [Biedl ら, 1998], [Grunbaum, 2003]。本研究では、凸多面体を正多面体のみに限定し、展開図の列挙アルゴリズムを与えることで、別の角度からこの問題を検討する。

4. 研究成果

主な研究成果は、以下の通りである。

詰将棋の列挙については、まず、飛駒 (飛車、角行、香車) 以外の駒を利用した詰将棋の列挙アルゴリズムを設計した。このアルゴリズムは、詰め上がり図の列挙、攻方逆算、玉方逆算からなり、不詰めや余詰めの判定を行いながら逆算を繰り返すことで列挙を行う。単純に局面を列挙するだけでは、逆算が数手進むだけで局面の数が爆発的に増大するため、暗黙の駒による直積空間を利用した局面集合を定義し、この集合に対して逆算を行った。計算機による列挙実験によると、たとえば桂馬のみを利用した詰将棋がすべて列挙され、11 手詰め以上の詰将棋が存在しないことが証明された。同時に、最長手数である 9 手詰めは、12 個存在することが示された (列挙と証明の融合)。また、飛駒を考慮することで合駒も含めた詰将棋の列挙アルゴリズムへと拡張を行った。

タイリングについては、90 度回転による p4 タイリングおよび 60 度回転による p6 タイリングの基本図形を生成するアルゴリズムを設計した。タイリングにおける基本図形は、それぞれ、複数の単位正方形を接続したポリオミノ、単位正三角形を接続したポリアモンドとした。試行錯誤による既存手法 [Fukuda ら, 2008, 2009] に対し、提案手法はルールに基づいて次に生成する図形を決める逆探索に基づくアルゴリズムである。ルールに基づいた生成のため、計算速度の高速化が、また、過去に生成した図形と同じであるかどうかを判定する必要が無いため、計算領域の削減が、特長である。

計算機実験では、p4 タイリングの基本図形として、既存手法による 10 個以下の単位正方形のポリオミノ 1, 109 種類に対し、提案アルゴリズムでは 25 個以下の単位正方形のポリオミノ 12, 627, 558 種類を生成することができた。また、p6 タイリングの基本図形として、既存手法による 16 個以下の単位正三角形のポリアモンド 2, 246 種類に対し、提案アルゴリズムでは 137, 535 種類を生成することができた。また、メモリ使用量は、たとえば p6 タイリングの基本図形の生成には 368 キロバイトで済むなど、有意に小さい値となっている。

正多面体の展開図の列挙による証明では、まず、二分決定グラフ (BDD: Binary Decision Diagram) を用いて任意の多面体の

展開図をすべて列挙するためのアルゴリズムを設計した。また、これにより得られる各展開図が重なりを持つかどうかを判定するアルゴリズムを設計した。

展開図の列挙アルゴリズムは、以下のステップからなる。(1) 展開図の制約条件を表す BDD の構築。(2) 同型な展開図の除去。(1) で用いる展開図の制約条件は、「開切する辺が、多面体のスケルトングラフの全域木を構成すること」であり、これを (1-a) 開切辺の集合 S はちょうど $n-1$ 本の辺を持つ (n は多面体の頂点数)、(1-b) S に含まれる辺がサイクルを構成しない、との 2 つの条件に分けることができる。これらを BDD で表し、その論理積を求めることで、2 つの条件を共に満たす辺の集合すなわち展開図の BDD を得る。この BDD において 1 定数節点への経路が展開図の個数を表すが、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の各多面体に対し、それぞれ 16, 384, 384, 5,184,000, 5,184,000 種類の展開図が存在することを確認した。また、(2) において辞書順で同型な展開図を除去することで、それぞれ 2, 11, 11, 43,380, 43,380 種類の展開図を得た。正十二面体と正二十面体については、これまで個数のみが知られていたが、具体的な展開図の形をすべて求めることができた。

さらに、展開図の重なりについては、各面の外接円が重なり判定により、絶対に重ならないとの保証を与えた。これにより、「正多面体の任意の展開図は重ならない」との定理を得、数百年に渡る未解決問題を肯定的に解決した。

以上の研究成果に関連し、以下の賞を受賞した。

- (1) The 9th EATCS/LA Workshop on Theoretical Computer Science, EATCS/LA Best Presentation Award, 2011 年.
- (2) 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, COMP-NHC 論文賞, 2008 年. (共著学生の発表に対する受賞)
- (3) 合同エージェントワークショップ & シンポジウム (JAWS) 2010, ベストプレゼンテーション賞, 2010 年. (共著学生の発表に対する受賞)
- (4) 第 23 回 回路とシステム 軽井沢ワークショップ, 奨励賞, 2011 年. (共著学生の発表に対する受賞)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- (1) X. Man, T. Horiyama, S. Kimura, Power Optimization of Sequential Circuits Using

Switching Activity Based Clock Gating, IEICE Transactions on Fundamentals, 査読有, vol. E93-A, no. 12 (2010), pp. 2472-2480.

- (2) L. Chen, T. Horiyama, Y. Nakamura, S. Kimura, Fine-Grained Power Gating Based on the Controlling Value of Logic Elements, IEICE Transactions on Fundamentals, 査読有, vol. E91-A, no. 12 (2008), pp. 3531-3538.

- (3) Y. Hanatani, T. Horiyama, K. Iwama, S. Tamaki, New Graph Calculi for Planar Non-3-Colorable Graphs, IEICE Transactions on Fundamentals, 査読有, vol. E91-A, no. 9 (2008), pp. 2301-2307.

[学会発表] (計 33 件)

- (1) T. Horiyama, W. Shoji, Edge-Unfoldings of Platonic Solids Never Overlap, 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 111, no. 25, COMP2011-14, pp. 17-23, 信州大学, 2011 年 5 月 11 日.

- (2) T. Horiyama, W. Shoji, Edge- Developments of Platonic Solids Never Overlap, Proc. of the 4th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC 2011), p.17, HsinChu, Taiwan, 2011 年 4 月 16 日.

- (3) T. Shirakawa, T. Horiyama, R. Uehara, Construct of Common Development of Regular Tetrahedron and Cube, Proc. of the 27th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2011), pp. 47-50, Morschach, Switzerland, 2011 年 3 月 28 日.

- (4) 庄子亘, 堀山貴史, いかなる辺展開でも正多面体は重ならない, 電子情報通信学会総合大会, DS-1-7, p. S-13-14, 東京都市大学, 2011 年 3 月 15 日.

- (5) 堀山貴史, 二分決定グラフを用いたお絵かきロジックの複数解の検出, 第 6 回 組合せゲーム・パズル 研究集会, 京都大学, 2011 年 3 月 10 日.

- (6) T. Horiyama, W. Shoji, Edge-Developments of Platonic Solids Never Overlap, The 9th EATCS/LA Workshop on Theoretical Computer Science, pp.30-1-30-8, Kyoto, Japan, 2011 年 2 月 3 日.

- (7) 堀山貴史, 入れ替え可能なオンライン問題について, 第2回 離散構造処理系シンポジウム, 北広島市, 2010年11月30日.
- (8) 上原隆平, 堀山貴史, 白川俊博, 複数のプラトン立体の共通展開図に関する研究, 第2回 離散構造処理系シンポジウム, 北広島市, 2010年11月30日.
- (9) 堀山貴史, 上原隆平, 正4面体と他の正多面体との共通の辺展開図に関する研究, 情報処理学会, アルゴリズム研究会, 2010-AL-132(1), pp. 1-4, 関西大学, 2010年11月19日.
- (10) T. Horiyama, R. Uehara, Nonexistence of Common Edge Developments of Regular Tetrahedron and Other Platonic Solids, Proc. of the China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications (CGGA 2010), pp. 56-57, Dalian, China, 2010年11月3日.
- (11) T. Horiyama, S. Yamane, Generation of Polyiamonds for p6 Tiling by the Reverse Search, Proc. of the China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications (CGGA 2010), pp. 58-59, Dalian, China, 2010年11月3日.
- (12) 杉本琢磨, 堀山貴史, プライバシーに配慮した安全な Vickrey オークション, 合同エージェントワークショップ&シンポジウム (JAWS 2010), Z1, pp. Z1-1-Z1-8, 富良野市, 2010年10月29日.
- (13) 杉本琢磨, 堀山貴史, 秘密分散を用いた安全な Vickrey オークション, 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 110, no. 232, COMP 2010-34, pp. 19-25, 東北大学, 2010年10月15日.
- (14) 堀山貴史, 回転によるタイリングについて, JST ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト セミナー, 北海道大学, 2010年9月16日.
- (15) 庄子亘, 堀山貴史, 正多面体の展開図の列挙, JST ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト・鷲尾研合同セミナー, 北海道大学, 2010年9月13日.
- (16) 堀山貴史, 展開図の列挙 ~正多面体、そして準正多面体~, 第12回 列挙アルゴリズムセミナー, 群馬大学, 2010年8月28日.
- (17) T. Horiyama, S. Yamane, Generation of Polyiamonds for p6 Tiling by the Reverse Search, LA Symposium, pp. 6-1-6-8, 氷見市, 2010年7月20日.
- (18) 堀山貴史, 二分決定グラフによる列挙の幾何への応用 ~正多面体の列挙~, 第1回 離散構造処理系シンポジウム, 北海道大学, 2010年5月28日.
- (19) 山根祥悟, 堀山貴史, 逆探索に基づく p6 タイリングの生成, 第23回 回路とシステム軽井沢ワークショップ, pp. 221-226, 軽井沢市, 2010年4月19日.
- (20) T. Horiyama, Enumeration of Irredundant Primitive Sorting Networks by Decision Diagrams, Proc. of the 3rd Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC 2010), p. 25, Pohang, Korea, 2010年4月17日.
- (21) 堀山貴史, 二分決定グラフによる非冗長プリミティブ整列回路網の列挙, 第11回 列挙アルゴリズムセミナー, 群馬大学, 2010年3月3日.
- (22) 堀山貴史, 回転タイリングの列挙 ~p4 から p6 へ~, 第10回 列挙アルゴリズムセミナー, 群馬大学, 2009年9月30日.
- (23) 堀山貴史, 繰り返し模様とタイリング (招待講演), 第9回 情報科学技術フォーラム (FIT), 九州大学, 2010年9月9日.
- (24) 堀山貴史, 最長経路問題と最大経路差問題 ~その解法と JR 大都市近郊区間大回りへの応用~, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2009 年秋季研究発表会, 1-D-5, pp. 80-81, 長崎大学, 2009年9月9日.
- (25) T. Horiyama, M. Samejima, Enumeration of Polyominoes for p4 Tiling, Proc. of the 21st Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2009), pp. 29-32, Vancouver, Canada, 2009年8月17日.
- (26) 堀山貴史, 樋口康介, 最長路問題と JR 大都市近郊区間大回りへの応用, 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 109, no. 108, COMP 2009-20, pp. 17-21, 北海道大学, 2009年6月29日.
- (27) T. Horiyama, M. Samejima, Enumeration of Polyominoes for p4 Tiling, 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 109, no. 54, COMP 2009-17, pp. 51-55, 埼玉大学, 2009年5月26日.

(28) T. Horiyama, M. Samejima, Enumeration of Polyominoes for p4 Isohedral Tiling by the Reverse Search, Proc. of the 2nd Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC 2009), p. 28, Hangzhou, China, 2009年4月11日.

(29) 堀山貴史, 鮫島真人, polyomino の p4 タイリングの列挙, 第9回 列挙アルゴリズムセミナー, 群馬大学, 2009年3月4日.

(30) 太田圭亮, 川原純, 伊藤大雄, 堀山貴史, 金図式、銀図式、桂馬図式の全列挙, 第4回 組合せゲーム・パズル 研究集会, 東京工業大学, 2009年3月3日.

(31) T. Horiyama, M. Samejima, Enumerating Polyominoes of p4 Tiling by the Reverse Search, LA symposium, pp. 9-1--9-3, 京都大学, 2009年2月2日.

(32) 堀山貴史, FOCS 2008 報告 (招待講演), 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 108, no. 330, COMP2008-53, p. 49, 群馬大学, 2008年12月3日.

(33) T. Horiyama, A. Sato, Density Condensation of Boolean Formulas Based on Covering Codes, Proc. of the 1st Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC 2008), p. 28, Hong Kong, 2008年4月26日.

[図書] (計1件)

(1) 堀山貴史, オンライン問題, 伊藤大雄, 宇野裕之 編, 離散数学のすすめ, 現代数学社, pp.246-260, 2010年.

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :

種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]
ホームページ等
<http://www.al.ics.saitama-u.ac.jp/horiyama/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堀山 貴史 (HORIYAMA TAKASHI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号 : 60314530