

機関番号：11301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20700006

研究課題名（和文） 数値計画問題に内在する多面体構造の解析と探求

研究課題名（英文） Analysis on polytopal structure of mathematical programs

研究代表者

森山 園子 (MORIYAMA SONOKO)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：20361537

研究成果の概要（和文）：

数値計画問題とは制約条件の元で目的関数を最適化する問題である。数値計画問題を迅速に解くことを目指して、様々なアルゴリズムが開発されてきた。多項式時間を達成する内点法が存在する一方で、ピボットアルゴリズムはアルゴリズムの単純さから今なお期待が大きい。本研究では、数値計画問題に内在する多面体構造を様々な角度から解析することで、より効率の良いピボットアルゴリズムの提案を目指し、ピボットグラフの向き付けの性質を探索した。

研究成果の概要（英文）：

A mathematical program is to optimize a given objective function under some constraints. There have been various kinds of algorithms to solve mathematical programs rapidly. While the interior-point method solves them in polynomial time, pivoting algorithms are still promising for simplicity of the algorithms. In this research, we have studied properties of orientation of pivoting graphs by analyzing polytopal structure of mathematical programs, in order to propose more effective pivoting algorithms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：離散構造

1. 研究開始当初の背景

数値計画問題とは一般に、制約条件を満たす解(実行可能解)のなかで目的関数の値が最小あるいは最大になるもの(最適解)を求める問題である。目的関数、制約条件により、線形計画問題をはじめとする様々な数値計画問題がある。これら数値計画問題を迅速に解くことを目指して、様々なアルゴリズムが開発されてきた。中でも、線形計画問題の解

法である単体法[Dantzig(1947)]にはじまる一連のピボットアルゴリズムは、アルゴリズムの単純さ、比較的容易な実装、更には実用上の性能も良いことから、現在でも広く用いられている手法である。しかし、理論的に多項式時間性を保証するピボットアルゴリズムは未だ存在せず、実際、ピボット操作の回数が不等式制約数の指数関数となる線形計画問題の例[Klee&Minty(1972)]が構成され

ている。その一方で、理論的に多項式時間性を保証する線形計画問題の解法として内点法が提案された。特に、超大規模問題を解く際には内点法の方が単体法よりも優れているとされ、他の数理計画問題にも一般化されている。しかし、内点法は数値的解法であるため、安定性や誤差といった問題を内包している。そのため、ピボットアルゴリズムに対する期待は未だに大きく、現在も多項式時間ピボットアルゴリズムの構築を目指して様々なアプローチが試みられてきた。

2. 研究の目的

任意のピボットアルゴリズムの振る舞いは、数理計画問題の許容領域のグラフ構造として記述される。特に、許容領域が多面体となる場合、このグラフ構造をピボットグラフと呼ぶ。近年の多面体理論の発展に伴い、ピボットグラフの向き付けの数理解析は大きく飛躍を遂げつつある。そこで、本研究では、数理計画問題に内在する多面体構造を様々な角度から解析することで、多面体構造におけるピボットグラフの向き付けの性質を探求し、より良いピボットアルゴリズムの提案を目指す。

3. 研究の方法

本研究では、一連の数理計画問題のうち線形計画問題(LP)、ある種の線形相補性問題(PLCP)、二次計画問題の1つである最小包含球問題(SEB)、有向マトロイド計画問題(OMP)に焦点をあて、以下の3つの目標を通じて、より良いピボットアルゴリズムを構築することを目指した。以下では、LP、PLCP、SEB、OMPのピボットグラフを、LPグラフ、PLCPグラフ、SEBグラフ、OMPグラフと呼ぶ。

(1) ピボットグラフの性質の解析

LPグラフ、PLCPグラフ、SEBグラフ、OMPグラフが共通して満たす組合せ的性質として唯一シンク性がある。更に、LPグラフとPLCPグラフでは、多面体理論において未解決問題であるヒルシュ予想との関連から提案されたHolt-Klee条件[Holt&Klee(1998)]の成立も示された。特に、一部のLPがHolt-Klee条件を駆使したピボット規則により非常に効率よく解かれたこと[Gärtner(2000)]から、ピボット規則開発における同条件の注目度は近年高まりつつある。そこで、第1に、他の数理計画問題におけるHolt-Klee条件の有効性を探求することを目指した。

一方で、数理計画問題のピボット規則開発においてHolt-Klee条件への期待が高まる一方で、同条件と非巡回性唯一シンク性を満たす多面体グラフの中でLPグラフではないもの

のが数多く存在することも知られている[Develin(2000)]。研究代表者はその打開策として、LPグラフが満たす新しい条件「シェリング条件」を提案した。既にシェリング条件により改善される既存のピボット規則の存在を確認しており、シェリング条件に基づくLPの新しいピボット規則の開発が期待される。そこで、第2に、数理計画問題におけるシェリング条件の有用性を探求することを目指した。

(2) LPとOMPの本質的なギャップの解析

OMPとはLPの組合せ的拡張であり、両問題の許容領域が組合せ同値であるとき、一連のピボットグラフ集合は「LPグラフ集合 \subset OMPグラフ集合」という包含関係を満たす。つまり、OMPのピボット規則はLPのピボット規則へと読み替えられる。しかし、各問題により特化したピボット規則を開発するためには、両問題を分ける線形性・非線形性の理解を深めることが重要となる。この線形性・非線形性を超平面配置と擬超平面配置において観察できる。ピボットグラフの場合は両問題における1つの多面体のみに着目するのに対し、超平面配置・擬超平面配置では両問題に内在する多面体の集合体に着目するので、後者の場合は両問題の構造をより深く把握することができる。そこで、線形性・非線形性を抽出する数値解析的手法の更なる発展を目指すことでピボットグラフにおける線形性・非線形性を見出し、これに基づきピボットアルゴリズムを開発することを目指した。

(3) 特定の多面体構造を持つ数理計画問題

PLCPグラフとSEBグラフの台グラフは常に超立方体のグラフであり、LPとOMP場合は、その許容領域が超立方体に組合せ同値であるとき、LPグラフとOMPグラフの台グラフも超立方体のグラフとなる。この意味で、超立方体のグラフを台グラフとする数理計画問題に近年注目が集まっている[Szabo&Welzl(2001)]。台グラフの限定により一般の数理計画問題より解明が進んでいるものの、ピボットグラフの理論的包含関係において「LPグラフ集合 \subset OMPグラフ集合」に加えて判明したものは「LPグラフ集合 \subset PLCPグラフ集合」[Morris(2002)]のみである。そこで、超立方体をはじめとする特定の多面体構造を内包する数理計画問題の解析を進めると共に、理論的または実験的アプローチにより、数理計画問題のピボットグラフに新たな包含関係を見出すことを目指した。

4. 研究成果

研究の方法で示した3つの研究目標について、関連する研究成果を以下に述べる。

(1) ピボットグラフの性質の解析

数理計画問題のピボットグラフの性質を解析することを目標に、ピボットグラフにおけるHolt-Klee条件およびシェリング条件の有用性を示した。

Holt-Klee条件については、OMPグラフにおいて同条件が成立しないことを示唆する実験結果を与えると共に、OMPグラフの双対構造にあたるグラフを提案し、同グラフにおいてはHolt-Klee条件が成立することを示し、同条件の有用性を示した。これらの成果を雑誌論文8にまとめた。

シェリング条件については、LPグラフの性質として知られていた3つの条件（非巡回性、唯一シンク性、Holt-Klee条件）を満たすグラフの集合と、これら3つの条件およびシェリング条件を満たすグラフの集合との間に、一般の次元で真に差があることを示し、LPグラフにおける同条件の有用性を示した。これらの成果を雑誌論文9および11にまとめた。

シェリング条件の成立・不成立を判定するためには、シェリングの存在を効率よく判定することが重要となる。そこで、多面体の一般化である単体的複体におけるシェリングを効率よく判定する方法を提案した。これらの成果を雑誌論文5, 12にまとめた。

(2) LPとOMPの本質的なギャップの解析

LPグラフとOMPグラフの本質的なギャップである線形性・非線形性の解析を目指して、LPグラフを内包する超平面配置とOMPグラフを内包する擬超平面配置に着目し、両構造の線形性・非線形性を抽出した。

擬超平面配置は組合せ論における有向マトロイドと同値の概念である。従って、超平面配置と擬超平面配置におけるギャップの探求は、有向マトロイドの実現可能性・不可能性の判定という問題に置き換えることができる。そこで、実現可能性・不可能性を判定する手法を提案すると共に、提案した手法を用いて実現可能性・不可能性が自明ではない有向マトロイドの最小のクラス（ランク4・要素数8およびランク3・要素数9）に属する全ての有向マトロイドの実現可能性・不可能性を判定し、このクラスのデータベースを構成した。実現可能性・不可能性を判定する性質および手法については、雑誌論文6, 7, 8にまとめると共に、学会発表9を行った。また、有向マトロイドの最小のクラスのデータベースおよびその応用については、雑誌論文

3, 4, 8にまとめると共に、学会発表2, 4, 6を行った。

有向マトロイドを通じた計算解析を行う上で、有向マトロイドそのものの列挙が重要になる。従来の列挙[Finschi, Fukuda (2001)]を超える列挙を実現するため、新たな列挙法としてマトロイドを通じた手法を提案した。本成果について、学会発表7を行った。

(3) 特定の多面体構造を持つ数理計画問題

特定の多面体構造を内包する数理計画問題の解析を進め、数理計画問題のピボットグラフに新たな包含関係を見出すことを目指した。

古典情報理論と量子情報理論の本質的な違いを示す手立てとして、ベル不等式の破れ[Bell (1964)]がある。両理論の違いの大きさを理解するうえで、この破れの大きさを決定することが重要となる。破れの計算は、カット多面体、elliptope および根付擬距離多面体という多面体構造における、数理計画問題の1つである半正定値計画問題として記述される。半正定値計画問題のピボットグラフを一般に構成することは自明ではないが、本研究では本問題におけるピボットグラフを考案することを目指して、破れの計算の振る舞いを解析した。これらの成果を雑誌論文10にまとめると共に、学会発表5, 8を行った。

また、多面体構造の理解を深めるため、多面体構造を含む幾何的対象の1つであるボロノイ図について2つの方向性から解析を進めた。1つ目は一様に多面体構造を含むperiodicグラフ上に配置した点集合に対するボロノイ図である。Periodicグラフは結晶格子をはじめとする様々な対象のモデルとして知られる。これらの成果を雑誌論文2にまとめると共に、学会発表1, 3を行った。

2つ目は非ユークリッド空間の1つである双曲空間においてボロノイ図を構成し、双曲空間における振る舞いを探求した。これらの成果を雑誌論文1にまとめた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

1. Toshihiro Tanuma, Hiroshi Imai and Sonoko Moriyama, Revisiting Hyperbolic Voronoi Diagrams from Theoretical, Applied and Generalized Viewpoints, Proc. of the 7th

- International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, 査読有, 7 巻, 2010 年, 23-32.
2. Norie Fu, Hiroshi Imai and Sonoko Moriyama, Voronoi Diagrams on Periodic Graphs, Proc of the 7th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, 査読有, 7 巻, 2010 年, 189-198.
 3. Hiroyuki Miyata, Sonoko Moriyama and Komei Fukuda, Complete enumeration of small realizable oriented matroids, Proc. of the 22nd Canadian conference on computational geometry, 査読有, 22 巻, 2010 年, 143-146.
 4. Antoine Deza, Hiroyuki Miyata, Sonoko Moriyama and Feng Xie, Hyperplane Arrangements with Large Average Diameter: a Computational Approach, Advanced Studies in Pure Mathematics, 2010 年, 印刷中.
 5. Sonoko Moriyama, Deciding shellability of simplicial complexes with \mathbb{Z}_2 -assignments, IEICE transactions on Information and Systems, 2010 年, 印刷中.
 6. Hiroyuki Miyata, Sonoko Moriyama and Hiroshi Imai, Deciding non-realizability of oriented matroids by semidefinite programming, Pacific Journal of Optimization, 査読有, 5 巻, 2009 年, 211-224.
 7. Komei Fukuda, Sonoko Moriyama, Hiroki Nakayama and Jurgen Richter-Gebert, Every non-Euclidean oriented matroid admits a biquadratic final polynomial, Combinatorica, 査読有, 29(6)巻, 2009 年, 691-698.
 8. Komei Fukuda, Sonoko Moriyama and Yoshio Okamoto, The Holt-Klee condition for oriented matroids, European Journal of Combinatorics, 査読有, 30(8)巻, 2009 年, 1854-1867.
 9. David Avis and Sonoko Moriyama, On Combinatorial Properties of Linear Program Digraphs, CRM Proceedings, 査読有, 48 巻, 2009 年, 1-14.
 10. David Avis, Sonoko Moriyama and Masaki Owari, From Bell Inequalities to Tsirelson's Theorem, IEICE transactions on Information and Systems, 査読有, E92-A(No. 5), 2009 年, 1254-1267.
 11. David Avis, Hiroyuki Miyata and Sonoko Moriyama, A family of polytopal digraphs that do not satisfy the shelling property, the 6th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2009 年, 236-246.
 12. Masahiro Hachimori and Sonoko Moriyama, A note on shellability and acyclic orientations, Discrete Mathematics, 査読有, 308 巻, 2008 年, 2379-2381.
- [学会発表] (計 9 件)
1. Hiroshi Imai, Norie Fu and Sonoko Moriyama, Information Processing by Quantum Graph States, 公開シンポジウム「ナノ量子情報エレクトロニクスの進展」, 2010 年 12 月 22 日, 東京大学.
 2. Hiroyuki Miyata, Sonoko Moriyama and Komei Fukuda, Database of point configurations and polytopes, and classification software, the 3rd International Congress on Mathematical Software (ICMS 2010), 2010 年 9 月 16 日, 神戸.
 3. Norie Fu, Hiroshi Imai, and Sonoko Moriyama, On Solving Parametric Integer Linear Programming for Explicit Shortest Path Function of Periodic Graphs, the 3rd International Congress on Mathematical Software (ICMS 2010), 2010 年 9 月 16 日, 神戸.
 4. 宮田洋行, 森山園子, 福田公明, 小さな有向マトロイドの実現可能性の完全な分類, 電子情報通信学コンピュータシミュレーション研究会 (COMP2010-4), 2010 年 4 月 22 日, 立命館大学.
 5. 森山園子, ベル不等式の幾何構造, 応用物理学会・量子エレクトロニクス研究会「量子情報の最前線と今後 10 年の展開」, 2010 年 1 月 10 日, 軽井沢.
 6. Hiroyuki Miyata, Sonoko Moriyama, Hiroshi Imai, Analyzing Geometric Realizability Problems by Semidefinite Programming, Kyoto RIMS Workshop on Computational Geometry and Discrete Mathematics, 2008 年 10 月 16 日, 京都大学.
 7. Yoshitake Matsumoto, Sonoko Moriyama, Hiroshi Imai, David Bremner, Large Scale Matroid Enumeration and Analysis of Orientation, Kyoto RIMS Workshop on Computational Geometry and Discrete Mathematics, 2008 年 10 月 16 日, 京都大学.
 8. Toshiaki Takahashi, Sonoko Moriyama, Hiroshi Imai, A Note on the Upper Bound Derived by Semidefinite Programming for the Maximum Quantum Violation of

Bell Inequalities, AQIS(Asian Conference on Quantum Information Science) 2008, 2008年8月27日, KIAS, 韓国.

9. 森山園子, 有向マトロイドの実現可能性問題における様々な展開, 日本オペレーションズ・リサーチ学会「計算と最適化」研究部会, 2008年6月28日, 上智大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森山 園子 (MORIYAMA SONOKO)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号 : 20361537

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :