

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20700011

研究課題名(和文) 計算困難な組合せ問題に対するアルゴリズムの設計と解析

研究課題名(英文) Design and Analysis of Algorithms for Computationally Intractable Combinatorial Problems

研究代表者

玉置 卓 (TAMAKI SUGURU)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：40432413

研究成果の概要(和文)：実用的な最適化問題の多くは、NP 困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。本研究では、これらの計算困難問題に対する高速な厳密アルゴリズムの設計とその計算量の解析を行った。結果として、充足可能性問題(3SAT)、解空間連結性問題に対する高速なアルゴリズムを得ることができた。また、Horn-SAT の解空間連結性問題、平面グラフの3 彩色可能性問題の計算複雑さを特徴付けることに成功した。

研究成果の概要(英文)：Many practical optimization problems are known to be NP-hard, which is the class of computationally intractable problems. In this study, we gave design and complexity analysis of efficient exact algorithms for such computationally difficult problems. As a result, we obtained improved algorithms for the satisfiability problems (SAT) and the Boolean connectivity problems. We also gave characterizations of the complexity of the Boolean connectivity problems for Horn-SAT and the 3-colorability problems for planar graphs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：計算量理論, アルゴリズム理論, 厳密アルゴリズム, 充足可能性問題, 計算困難性

## 1. 研究開始当初の背景

社会システムや産業活動などに関連して現れる生産計画, 配置計画, スケジューリング, 自動設計などを始めとする重要な問題の多くは、NP 困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。これらの問題に対する既知の厳密アルゴリズムは、全て指数時間アルゴリズムであり、実用上の観点からは使用に耐えないことが多かった。そのため、最適解を求めることを保証しないヒューリスティッ

クや、ある程度最適解に近い実行可能解を求める近似アルゴリズムを用いることが主流となっていた。

しかし、計算機の高高速化により、実用的な問題に対して指数時間アルゴリズムを適用することも可能となってきている。例えば、集積回路の分野において、論理式の充足可能性問題の厳密解を求めることにより、大規模回路の自動設計に成功している。このような状況を反映して、より高速な指数時間厳密ア

ルゴリズムの設計とその性能解析がますます重要となっている。

## 2. 研究の目的

本研究では、計算困難な組合せ問題に対する高速な厳密アルゴリズムの設計とその計算量の解析を目的とする。特に計算困難な組合せ問題の中でも重要と考えられている、以下の2つの問題を中心に高速なアルゴリズムの設計と高速化の限界についての解析を行う。

### (1) 論理式の充足可能性問題

与えられた  $n$  変数の和積形論理式に対し、全ての節を充足する変数割当てを求める問題である。

### (2) グラフの彩色可能性問題

与えられた  $n$  頂点のグラフに対し、最小の色数を用いて、隣接するどの2頂点も異なる色を持つように頂点を塗り分ける問題である。

## 3. 研究の方法

本研究の対象とする問題はいずれも現在最高速の厳密アルゴリズムの計算時間は  $c$  の  $n$  乗 ( $c$  は1より大きい定数) と入力サイズ  $n$  について指数時間となっている。この指数  $c$  の値をできるだけ小さくすることが目標となる。重みつき分割統治法、計算機を援用した詳細な場合分け、確率アルゴリズム、固定パラメータ解析など近年発展した手法をさらに発展、改良させ新たな設計・解析手法を確立する。それらを用いて、上記2問題以外の組合せ最適化問題に対する厳密アルゴリズムの設計も行う。

## 4. 研究成果

### (1) 3-SAT に対する乱択アルゴリズムの改良 [学会発表②]

本研究では、3-SAT に対する  $1.3211\hat{n}$  時間の乱択アルゴリズムを与えた。既存の最良の上界は2005年にRolfが発表したもので、 $1.32216\hat{n}$  である。我々の新しいアルゴリズムは、岩間-玉置が2004年に示したアルゴリズムと同様のアプローチを用い、さらに、Hofmeisterらによる、非一様な初期値を利用した、Schoeningの局所探索アルゴリズム高速化を用いている。

充足可能性問題(SAT)とは、与えられた和積標準形の論理式を充足する変数割当てが存在するかどうかを判定する問題である。論理式の各節に含まれるリテラル数を定数  $k$  に制限した問題( $k$ -SAT)においては、非自明な  $c\hat{n}$  時間 ( $c < 2$ ) のアルゴリズムが知られている。ここで、 $n$  は論理式の変数の個数である。特に、 $k=3$  の場合の3-SATは、アルゴリズムの設計と解析の分野におけるベンチマーク問題と呼ばれ、多くの研究者が“世界記録更新”の競争に参加している。

3-SAT に対する厳密アルゴリズムは、高速化による実用的な意味だけでなく、アルゴリズム設計における様々な新しいアイデアが含まれていることから重要である。例えば、Paturi, Pudlak, Saks, Zane はバックトラックアプローチに基づき、制約条件が強い例題に対してうまく動作する、いわゆる PPSZ アルゴリズムを与えた。彼らは、任意の例題に強い制約条件を課す手続きも与えた。Schoening は、基本的な局所探索アルゴリズムに対して、単純かつ洗練された成功確率解析を示した。Hofmeister, Schoening, Schuler, Watanabe は局所探索アルゴリズムに非一様にランダムな初期値を与えることで、成功確率を改善することに成功した。岩間, 玉置は PPSZ と Schoening のアイデアを非自明な方法で組み合わせることにより、高速なアルゴリズムを得ることに成功した。本研究では、これら既存のアイデアを非自明な方法で組み合わせることにより、より高速なアルゴリズムを得ることができた。

### (2) 3-SAT に対する HSSW アルゴリズムの脱乱択化 [学会発表①]

本研究では、3-SAT に対する  $1.3303\hat{n}$  時間の決定性アルゴリズムを与えた。これは Moser, Scheder による現在最速のアルゴリズムの計算時間  $1.3334\hat{n}$  を更新する結果である。我々のアルゴリズムは Hofmeister らの乱択アルゴリズムを完全に脱乱択化することで得られた。

3-SAT に対する既存の最良のアルゴリズムの計算時間は、乱択アルゴリズムで  $1.3211\hat{n}$ 、決定性アルゴリズムで  $1.3334\hat{n}$  と、有意のギャップがある。このギャップを完全になくすことができるか、という自然かつ重要な未解決問題がある。そのためのアプローチとして有力なのは脱乱択化の方法である。脱乱択化とは、乱択アルゴリズムを決定性で効率よく模倣するアルゴリズムを構築することをいう。脱乱択化の有名な結果として、素数判定, Lovasz Local Lemma, 半正定値計画問題の解のラウンディング, 無向グラフの  $st$  連結性判定, などが知られている。充足可能性問題に関しては、Schoening のアルゴリズムの脱乱択化という優れた結果がある。

Schoening は1999年に3-SATに対する乱択の局所探索アルゴリズムを与えた。その計算時間は  $1.3334\hat{n}$  である。Dantsin らは2000年にSchoeningのアルゴリズムの脱乱択化に成功し、 $1.5\hat{n}$  時間の決定性アルゴリズムを得た。以降計算時間は少しずつ改良されていき、最終的に Moser と Scheder が完全な脱乱択化に成功した。すなわち、 $1.3334\hat{n}$  時間の決定性アルゴリ

ムを得ることができた。

本研究では、Schoening のアルゴリズムに非一様ランダムな初期値を与えることで計算時間を改良した Hofmeister らのアルゴリズムを脱乱択化した。鍵となるアイデアは covering code と呼ばれる組合せ構造である。Schoening のアルゴリズムの脱乱択化では、一様ランダムな初期値を模倣するために covering code が用いられた。我々は非一様ランダムな初期値を模倣するために、適切な covering code の効率よい構成を与えた。

### (3) Horn-SAT の解空間連結性 [雑誌論文②]

Gopalan らは 2006 年に、ブール論理式の解空間の連結性に関する研究結果を発表した。彼らは、いわゆる Schaefer の枠組みで連結性判定問題の計算複雑さを調べた。論理関係の集合  $S$  が bijunctive (Horn, dual Horn, affine も同様) とは、 $S$  に含まれるすべての関係が bijunctive (Horn, dual Horn, affine も同様) であることである。  $S$  が bijunctive, Horn, dual Horn, affine のいずれかのとき、 $S$  が SCHAEFER であるという。Gopalan らは、SCHAEFER である  $S$  に関して、連結性判定問題は多項式時間で解けると予想した。我々は、連結性判定問題が coNP 完全になるような Horn である  $S$  が存在することを示し、予想を反証した。また、特徴集合が与えられた場合、Horn と dual Horn の連結性判定問題が多項式時間で解けることを示した。

### (4) $k$ -CNF-SAT の解空間連結性問題に対する厳密アルゴリズム [雑誌論文①]

本研究では、PSPACE 完全問題である CONN- $k$ -SAT に対する厳密アルゴリズムを示した。CONN- $k$ -SAT とは、 $k$ -CNF 論理式の解集合により誘導されるハミングキューブの部分グラフが、連結かどうかを問う問題である。この問題は、 $k$  が 3 以上のとき PSPACE 完全、 $k$  が 2 以下のとき多項式可解であることが知られている。我々は、 $k$  が 3 以上のとき CONN- $k$ -SAT が  $(2-c_k)^n$  で解けることを示した。ここで  $c_k > 0$  は  $k$  のみに依存する定数である。この結果は、他の代表的な PSPACE 完全問題である QBF-3-SAT が  $(2-d)^n$ 、 $d > 0$  は任意の定数、の時間で解けないことがある妥当な仮定のもとで示されていることと比較すると興味深い。その仮定とは SAT が  $(2-e)^n$ 、 $e > 0$  は任意の定数、の時間で解けない、という広く信じられている仮定である。

### (5) 3 彩色不能な平面グラフに対する新しい Calculus [雑誌論文⑤]

Hajos calculus は 3 彩色不能なグラフ族

を生成する非決定性手続きである。もし任意の 3 彩色不能なグラフがこの手続きにより多項式ステップで生成可能であれば、 $NP=coNP$  が成立する。 $NP=coNP$  は成立しないと予想されているが、今日まで、多項式ステップで生成されないグラフ族が存在するかどうかは未解決となっている。この問題に取り組むため、我々は二種類の新しい手続き、PHC と PHC\* を提案する。これらの手続きは、3 彩色不能な平面グラフを生成し、さらに手続きの途中で現れるグラフもまた全て平面である、という性質を持つ。我々は PHC と PHC\* が完全かつ健全であることを証明した。さらに PHC\* が PHC を多項式ステップで模倣できることも示した。

### (6) 平面グラフに対する Hajos Calculus の複雑さ [雑誌論文④]

平面 Hajos calculus は Hajos calculus に制限を加えたものである。その制限とは、構成に現れるすべてのグラフは(最後のグラフも含め)平面でなければならない、というものである。我々は平面 Hajos calculus が多項式上界を持つことと Hajos calculus が多項式上界を持つことが同値であることを証明した。

### (7) 定数次数グラフに対する平面 Hajos Calculus [雑誌論文③]

次数  $d$  平面 Hajos calculus (PHC( $d$ )) とは平面 Hajos calculus (PHC) に制限を加えたものである。その制限とは、構成に現れるすべてのグラフは(最後のグラフも含め)最大次数が高々  $d$  でなければならない、というものである。我々は以下を証明した。

- (i) もし PHC が多項式上界を持つならば、任意の 4 以上の  $d$  について PHC( $d+2$ ) が任意の最大次数高々  $d$  の 3 彩色不能平面グラフを多項式ステップで生成可能である。
- (ii) もし PHC が任意の最大次数高々 4 の 3 彩色不能平面グラフを多項式ステップで生成可能であれば、PHC が多項式上界を持つ。

### (8) Hajos Calculus による 3 彩色不能平面グラフの列挙 [学会発表⑤]

我々は全ての 3 彩色不能な平面グラフを生成するアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは Hajos calculus の一種に基づいている。Hajos calculus は全ての 3 彩色不能なグラフを生成する非決定性手続きである。我々のアルゴリズムは、既に生成されたグラフと同型なグラフを出力しない、頂点数に関して昇順に 3 彩色不能なグラフを生成していく、という性質を持つ。

### (9) 完全性を持つ質問効率のよい非適応的 Long Code Test [学会発表③]

Long Code Test は性質検査と近似困難性の分野の基本的な問題である。Long Code とは  $f(x)=x_i$  の形の関数、つまり入力 of 1 ビットにのみ依存する関数である。Long Code Test では、プール関数族のオラクルが与えられ、それらの関数族が同じ Long Code であるか、または、任意の2つの関数の cors influence が小さいか、を識別しなければならない。本研究では、完全性を持ち非適応的なクエリを  $q$  回行うテストの健全性  $s$  がどれだけ小さくなるかを研究した。我々は  $s=(2q+3)/2^q$  である Long Code Test を与えた。ここでは  $q=2^k-1$  の場合のみを考えている。我々のテストは Samorodnitsky, Trevisan のハイパーグラフ linearity test に適切なノイズ分布を付加したものである。健全性の解析のために、O'donnell, Wu の Invariance Principle タイプの議論を用いた。

既存の結果では, Hastad, Khot が 2005 年に  $s=1/2^{\{q-4q^{1/2}\}}$  を示している。Chen は 2009 年に、“適応的”な質問を許したテストで  $s=q^3/2^q$  を得ている。“ほとんど”完全性を持つテストに関しては、Samorodnitsky, Trevisan が  $s = 2q/2^q$ , Austrin, Mossel が  $s=(q+o(q))/2^q$  を示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. An Exact Algorithm for the Boolean Connectivity Problem for  $k$ -CNF. Theor. Comput. Sci., to appear.
- ② Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. On the Boolean connectivity problem for Horn relations. Discrete Applied Mathematics, 158(18):2024-2030, 2010.
- ③ Kazuo Iwama, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki. The Planar Hajós Calculus for Bounded Degree Graphs. IEICE Transactions, 93-A(6):1000-1007, 2010.
- ④ Kazuo Iwama, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki. The complexity of the Hajós calculus for planar graphs. Theor. Comput. Sci., 411(7-9):1182-1191, 2010.
- ⑤ Youichi Hanatani, Takashi Horiyama, Kazuo Iwama, Suguru Tamaki. New Graph Calculi for Planar Non-3-Colorable Graphs.

IEICE Transactions, 91-A(9):2301-2307, 2008.

[学会発表] (計 15 件)

- ① Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. Derandomizing HSSW Algorithm for 3-SAT. The 17th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON), August 2010, Dallas, Texas, USA.
- ② Kazuo Iwama, Kazuhisa Seto, Tadashi Takai, Suguru Tamaki. Improved Randomized Algorithms for 3-SAT. The 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC), December 15, 2010, Jeju Island, Korea.
- ③ Suguru Tamaki, Yuichi Yoshida. A Query Efficient Non-adaptive Long Code Test with Perfect Completeness. The 14th International Workshop on Randomized Techniques in Computation (APPROX-RANDOM), September 9, 2010, UPC Barcelona, Spain.
- ④ Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. An Exact Algorithm for the Boolean Connectivity Problem for  $k$ -CNF. The 13th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT), July 11, 2010, Edinburgh, Scotland, UK.
- ⑤ Kazuo Iwama, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki. Enumerating Non-3-colorable Planar Graphs by the Hajós Calculus. 12th Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC), July 4, 2009, Seoul, Korea.

[図書] (計 3 件)

- ① 伊藤大雄, 宇野裕之 編著, 現代数学社. 離散数学のすすめ (玉置卓, 第 16 章 計算量理論の最先端). May, 2010, 325 pp.

[その他]

ホームページ等  
<http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~tamak/index-j.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

玉置 卓 (TAMAKI SUGURU)  
京都大学・情報学研究科・助教  
研究者番号: 40432413