様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年６月１０日現在

機関番号：12401
研究種目：若手研究（B）
研究期間：　2008 ～2010
課題番号：20740004
研究課題名（和文）　ログ極小モデル理論の視点からのアフィン代数多様体の構造解析へのアプローチ

研究課題名（英文）Analysis of structures on affine algebraic varieties from the viewpoint of log minimal model theory

研究代表者 岸本　崇（KISHIMOTO TAKASHI）
埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：20372576

研究成果の概要（和文）：
本研究では高次元(３次元)以上のアフィン代数多様体の構造を解析した。より正確に述べると２つの方向で高次元アフィン代数多様体を解析した。１つ目は，射影偏極代数多様体上のアフィン錐への加法群スキームの作用の存在についての必要十分条件を偏極多様体に含まれる特殊な開集合の存在に翻訳することに成功した。２つ目は，３次元アフィン空間の斉次な加法群スキーム作用を重み付き射影平面上のある種の性質を有する有理曲線の線形束に翻訳することに成功し，この情報をもとに様々な複雑な自己同型を構成することが出来た。

研究成果の概要（英文）：
In the present project of research, I devoted mainly myself to the analysis of structures on affine algebraic varieties from the various points of view. More precisely, in the first viewpoint, I succeeded into the translation of the existence of actions of a 1-dimensional additive group on affine cones over polarized projective varieties into the existence of certain kinds of open subset contained in the polarized varieties. In the second, I could reduce the homogeneous action of a 1-dimensional additive group on the affine 3-space to linear pencil of rational curves with special properties on weighted projective planes to be able to produce plenty of complicated automorphisms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	1,080,000	4,290,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：アフィン代数幾何学，双有理幾何学，加法群スキーム作用

１．研究開始当初の背景

代数幾何学の一分野であるアフィン代数幾何学は，あらゆる代数多様体がアフィン開集合の張り合わせで構成されるという意味でも代数幾何学に於いて重要な分野であるが，射影幾何学，双有理幾何学に比較するとアフィン代数多様体の構造を把握するときに適用できる理論が少ないというのが現状

であった。ただし，２次元のアフィン代数多様体(アフィン曲面と呼ばれる)については，１９７０年代後半から様々な研究者(M. Miyanishi, R.V. Gurjar, P. Russell などに代表される)によって射影曲面の分類理論を用いることによって，アフィン曲面の理論は現在までに著しく発展をしてきている。その一方で３次元以上のアフィン代数多様体に対しては統一的に取り扱うことができる理論は存在していない。このような状況を考慮して高次元(３次元以上)のアフィン代数多様体の構造を解析する方法を編み出すことが強く期待されている。この種の研究については，研究代表者が長年取り組んできており，３次元の場合に限ればコンパクト化に関するある種の条件のもとでは３次元アフィン代数多様体を解析する１つの方向性は編み出している。ただし，研究代表者の個人的な意見としては３次元以上の場合には２次元のときとは違って，単純に射影幾何学・双有理幾何学のみを適用するのでは不十分であると思う。確かに双有理幾何学に於ける非常に有効な理論である極小モデル理論は，双有理的な性質を理解する上では重要なのであるが，アフィン代数幾何学で要求される具体的な問題に対しては現段階ではその効力は発揮されていない。勿論それは研究代表者である私自身の力不足がそうさせていということもあるのだが，２次元では巧くいっていた数多くの現象が３次元以上では成り立たないことはアフィン代数幾何学でも双有理幾何学でも頻発しているので，極小モデル理論のみに依存するのは程々にしておいて，例え少々特殊なクラスであってもアフィン代数幾何学で意味のあるアフィン代数多様体のクラス(例えばある種の群作用を有するアフィン代数多様体)を，双有理幾何学も適宜援用しながらその構造を解析することが求められている。

２．研究の目的

本研究の目的は一言で言えば「高次元アフィン代数多様体の構造解析の為の手法・理論を編み出す」ことにある。この場合，“構造”という言葉は意味が広すぎて少し漠然としている。実は本研究のスタート地点では２次元の場合(アフィン曲面)の構造定理にこだわり過ぎていた為に，少々研究の対象となるアフィン代数多様体のクラスを広げ過ぎていた。その結果，得られる結果も適用できるクラスは幅広いものの漠然とした構造定理になっていた。勿論，広範囲のアフィン代数多様体に適用することが出来る結果も大切ではあるとは思うが，多少は対象となるアフィン代数多様体のクラスを制限してでもより深い構造を調べることも劣らず重要である。ここではアフィン代数幾何学の視点から重要と思われるクラスの選別が問題となってくる。先ずアフィン代数幾何学で最も重要であり更に可換環論的にも大切な多様体としてアフィン空間 C^n を含むクラスでなくてはならない。アフィン空間 C^n は代数幾何学的に色々な顕著な性質をもっているが，代表的なものとしては次のような性質が挙げられる：

(1) 加法群スキームの作用がある：
(2) 乗法群スキームの作用がある：
(3) トーリック多様体である：
(4) 位相的に可縮である。

どの様な性質に注目してクラスを制限するかに応じて，適用できる手法および期待される結果も変わってくる。例えば最後の(4)の性質に注目をすると，考えられるクラスとしては位相的に可縮なアフィン代数多様体若しくはより一般的にホモロジー空間となり，自ずと位相的な議論，考察がメインになる。一方で例えば(1)，(2)の性質の視点からは射影代数多様体，双有理幾何学的な手法と同時に群作用の理論も適用できる。実際に，(2)の性質によって乗法群作用の商(厳密に言うと，固定点を除いた部分の商)を取ると得られる多様体は射影多様体になるので双有理幾何学の諸結果を適宜適用することができる。一般のアフィン代数多様体では乗法群作用があるとしても，その商は射影多様体になるとは限らないがその場合であっても商多様体の次元はもともとのアフィン代数多様体の次元よりも小さくなる。(1)の性質の場合は事象を幾何学的にも代数的にも取り扱うことができる。つまりアフィン代数多様体に加法群スキームの作用が存在すると，これは多様体の座標環の局所冪ゼロ導分(LND)という純代数的な概念に翻訳される。取り扱うアフィン代数多様体に応じて，座標環の LND に注目しても幾何学な作用に注目しても議論できるというアドヴァンテージがある。更にこの場合も加法群作用の商を取ることによって低次元のケースに帰着できる。

以上のように C^n の様々な特性に応じて考えるべきアフィン代数多様体のクラスが様々考えられるが，本研究では特に(1)，(2)の性質に注目する。すなわち，加法群スキームと乗法群スキームの作用が存在するアフィン代数多様体である。

例えば(2)の性質を有しているアフィン代数多様体の代表的なものとして，射影空間への埋め込みを指定した射影代数多様体(偏極多様体と呼ばれる)上のアフィン錐がある。このようなアフィン錐には自然に乗法群スキームの作用があり，アフィン錐の頂点が唯一つの固定点になっており，その頂点を除いた

部分に乗法群は自由に作用してその結果得られる商多様体はもともとの偏極多様体である。アフィン錐に関して特異点に視点からも関心がある問題としては，「どのような偏極多様体上のアフィン錐に，加法群スキーム作用が存在するのか？」が考えられる。一般的に(アフィンとは限らない)擬射影多様体内の孤立特異点について，この特異点を通らない沢山の有理曲線が存在すれば，特異点のタイプは有理特異点であるということが２００３年の Flenner-Zaidenberg の結果によって知られている。従って偏極多様体が有理的でなければ，それ上のアフィン錐には加法群スキームの作用は存在しない。しかし有理的な場合にはアフィン錐に作用があるかどうかはケースバイケースである。加法群スキーム作用の存在に関するこのような少々混沌とした状況を払拭するべく，何かしら作用の存在性に関する判定法が得られることが望ましい。

このような状況を踏まえて，本研究の目的はより具体的には：

(i)まず偏極多様体上のアフィン錐に加法群作用が存在するための必要十分条件を偏極多様体の情報で記述する；

(ii) (i)で得た情報を基にして，様々な偏極多様体を具体的に与えて加法群の存在性，および存在するときには対応するアフィン錐の自己同型を記述する；

ことを目的とする。

３．研究の方法

2.で述べた研究目的を実現する為の手法は問題自体がアフィン代数幾何学(加法群スキーム，乗法群スキームの作用に関する情報は座標環の次数付けや局所冪ゼロ導分というアフィン代数幾何学，可換環論の範疇に入る)，双有理幾何学(偏極多様体としては極モデル理論の視点からも関心のある Fano 多様体を考えることがしばしばある)の双方向の手法が必要となる為に幅広い知識と共に必要に応じて研究代表者以外にも適宜その他の研究者との共同研究が必要になる。より詳細に述べると海外の２人の研究者の協力避けては通れない。先ずはアフィン代数幾何学の第一人者であり現在も尚，様々な研究を精力的に行っている Mikhail Zaidenberg 氏(グルノーブル第一大学フーリエ数学研究所；フランス：グルノーブル)の協力は必然である。第二に高次元双有理幾何学の分野で非常に活発に質の高い研究を続けている Yuri Prokhorov 氏(モスクワ大学；ロシア：モスクワ)の極小モデル理論の幅広く深い知識，洞察力も非常に重要である。

以上の２人の研究者と共同で偏極多様体上のアフィン錐の加法群スキームという共通の問題を考察する。

以上が本研究プロジェクトを遂行する為のメンバーであるが，具体的な研究の進め方は次の通りである。(Y,H)を有理的な偏極多様体として，X を対応するアフィン錐とする。先ずは X に加法群スキームの作用が存在すると仮定をして，(Y,H)にどのような性質を有していることが課されるのかについて考察する。ただ単に加法群スキームと言うと幅広い対象となるのだが，アフィン錐 X の場合には乗法群スキームの作用が既に備わっているということに注意をしておくと，与えられた加法群スキーム作用は斉次な作用に帰着することができる。斉次な加法群作用は，下にある偏極多様体(Y,H)上に特殊な性質を有した有理曲線の存在を課すことになるが，この現象を双有理幾何学の言葉で正確に述べる必要がある。この翻訳の際には Zaidenberg 氏と Prokhorov 氏の２人の知識を結合する。Y の次元が２次元以下の場合などには得られるアフィン錐 X も十分具体的な対象であるため，X 自身を直接的に考察することもできると思われがちであるが，実際には十分に難しいケースも存在する。代表的なものには Fermat cubic と呼ばれる３次元射影空間 P^3 の中で x^3+y^3+z^3+u^3=0 で定義される非特異射影曲面上のアフィン錐というものは４次元アフィン空間 C^4 の中で同じ方程式で定義されている正規アフィン代数多様体であるが，非常に具体的に定義されてはいるがそれに実際に加法群スキームの作用が存在するのかどうかは現地点でも最終的には把握できていない。しかしその場合であっても同様に下の偏極多様体である Fermat cubic 上に課される特殊な性質を通して考察することが有効であるように思われる。

このように様々なアフィン錐上の加法群スキームを観察することはそれ自体,大変に興味深い問題であるが，もともとそのようなクラスの多様体を考察するきっかけとなったのは，アフィン代数幾何学での中心的存在でもあるアフィン空間 C^n が重み付き射影空間上のアフィン錐とみなせるという事実にある。そこで特に n=3 の場合,すなわち３次元アフィン空間 C^3 の複雑な自己同型を斉次な加法群スキーム作用，または重み付き射影平面上の特殊な線形束という幾何学的な対象から構成することを考える。

重み付き射影空間上のアフィン錐を考えるとそれはアフィン空間 C^n になるが，ここで出てくる重み付き射影空間は双有理幾何学的な視点で見ればピカール数が１の Fano 多様体の特殊なケースである。２次元の場合にはピカール数が１の Fano 多様体は del

Pezzo 曲面とよばれ古典的に詳細に研究されている。従って，この観点から次に取り組むべき対象となる偏極多様体はピカール数が１の３次元 Fano 多様体である。３次元 Fano 多様体の研究に関しては，ロシアの代数幾何学一派は非常に強力であり，そのロシアの双有理幾何学を代表する Prokhorov 氏のアイデアをこの研究に活かすことが不可欠となる。

４．研究成果

ここでは，2.,3. で述べた研究の目的，研究の方法を基に得られた研究成果について述べる。

(1) 先ずは偏極多様体(Y,H)上のアフィン錐 X への加法群スキームの存在を，(Y,H)上の幾何学的特性に翻訳することに,Zaidenberg 氏と Prokhorov 氏との共同研究を通して成功したのでそれを述べる。つまり「X 上に加法群作用が存在する為の必要十分条件は，Y が H-polar な cylinder を含むことである。」という事実を証明することができた。ここで幾つかの用語を説明する必要がある。Y の **H-polar** な開集合とは，H に Q-線形同値な適当な Q-有効因子 D によって Y-D という形で表される開集合のことである。一方,**cylinder** とはアフィン直線 C^1 との直積と同型な Y の開集合のことである。この結果を聞いただけでは何となく意義が汲み取りにくいと思うので，少し説明を加える。アフィン錐 X への加法群作用は X の座標環の局所冪ゼロ導分(LND)に翻訳されることは一般的に良く知られている。しかし具体的に X を与えたとしても，その座標環の LND を記述すること，実際に求めることは通常は困難である。勿論，X がアフィン空間 C^n などの場合には沢山の LND を見つけることはできるが，一般にアフィン錐 X は複雑な方程式系で定義されている為に，座標環の LND という観点から考察するのは一般には適当でない。一方，今回の結果によればそのような純代数的な手法を取らずに，別に明示的に座標環の LND を記述する必要もなく， 下にある偏極多様体(Y,H)の H-polar cylinder を探すという幾何学的な考察で充分になる。ここでの結果は特殊なアフィン錐(例えば重み付き射影空間上のアフィン錐であるアフィン空間 C^n，ピカール数１の３次元 Fano 多様体上のアフィン錐など)への加法群作用の存在を観察するときに効果を発揮する。

(2) 次に，(1)の最後で述べたように，特殊なアフィン錐のクラスに(1)の結果を応用することを考えた。先ずはアフィン代数幾何学で最も重要な多様体であるアフィン空間 C^n である。C^n には明らかに沢山の加法群作用が存在しているのでこれ以上何を調べるのかと思われるかもしれないが，C^n の自己同型群の構造解析という視点からは非常に重要である。これについても少し解説する。一般にアフィン空間 C^n の自己同型群を決定することはアフィン代数幾何学では中心的な問題であるのだが，n が２以下の場合には古典的にその構造はよく知られている。しかしながら n>2 に対しては，殆ど構造が解明されていないというのが現況である。自己同型群の構造自体を完全に決定するのは確かに現段階では難しいと思われるが，tame ではない複雑な自己同型を組織的に構成する方法を編み出すことは重要に思われる。ここで複雑な自己同型を構成する１つの方法が加法群スキームの作用を利用するものである。実際に加法群の作用が存在すると，そこから自己同型の１次元の族が得られる。しかしながら全ての n>2 に対して一般的に取り扱うのは難しいので，さしあたっては未解決なケースで次元が最も低い n=3 の場合，つまり３次元アフィン空間 C^3 への斉次な作用を(1)での考察･結果をもとにして明示的に記述することを考える。結果として，１９９０年代後半に D.Daigle によって得られた３変数多項式環 C[x,y,z]の斉次な LND の核の生成元の特徴付けに関する結果の別証明を与えることに成功した。斉次な LND は純代数的な対象であるので，Daigle による証明方法も純代数的なものであったが，今回は(1)の手法を用いて重み付き射影平面上の線形束の基底点解消

という幾何学的な視点から証明をあたえることができた。この線形束がどの程度複雑な自己同型の族を与えるのかということに関係している事実も実証することができた。(この実証の部分には黒田茂氏による C^3 の tame ではない自己同型の１つの十分条件が使用される。)

(3) 上記の(1),(2)が現在までに論文という形で発表されている結果である。しかし,(1)でのテクニックを基にして現在進行形の研究もある。(1)での結果は Zaidenberg 氏と Prokhorov 氏との共同研究を通して得られたが,同じメンバーでピカール数が１の３次元 Fano 多様体上のアフィン錐にいつ加法群スキームの作用が存在するのかという問題を提起して,現在までに非自明な例を組織的に構成することに成功した。この結果は現在,既にプレプリントとして Arxiv に公表されており,間もなく投稿される予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）（過去５年）

[1] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov, Mikhail Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, to appear in the Proceedings in honor of Professor Peter Russell.

[2] Takashi Kishimoto, *Homogeneous locally nilpotent derivations of C[x, y, z] and pencils of rational plane curves*, RIMS Kokyuroku Bessatsu B24 (2011), 81-101.

[3] Takashi Kishimoto, *A new proof of the non-tameness of the Nagata automorphism from the point of view of the Sarkisov Program*, Compositio Mathematica 144 (2008), 963-977.

[4] Takashi Kishimoto, *Affine threefolds whose log canonical bundles are not numerically effective*, Journal of Pure and Applied Algebra 208 (2007), 189-204.

[5] Takashi Kishimoto, Hideo Kojima, *Affine lines on Q-homology planes with logarithmic Kodaira dimension* $-\infty$, Transformation Groups 11 (2006), 659-672.

[6] Takashi Kishimoto, *On the logarithmic Kodaira dimension of affine threefolds*, International Journal of Mathematics 17 (2006), 1-17.

〔学会発表〕（計８件）（過去３年）

[1] Takashi Kishimoto, *Affine uniruledness does not imply the existence of A^1-fibrations, A^1-cylinders and G_a-actions in higher dimensions*, 4 June 2011, 代数幾何学シンポジウム-佐渡-

[2] Takashi Kishimoto, *G_a and G_a^2-actions on the complements of hypersurfaces in P^n*, 9 May 2011, Jouenee de geometrie algebrique affine a l' institut Fourier.

[3] Takashi Kishimoto, *G_a and G_a^2-actions on the complements of hypersurfaces in P^3*, 3 March 2011, 7th international conference on Affine Algebraic Geometry in Osaka.

[4] Takashi Kishimoto, *Affine uniruledness and G_a-actions on affine algebraic varieties*, 6 November 2010, 射影多様体の幾何とその周辺２０１０.

[5] Takashi Kishimoto, *Affine uniruledness and G_a-actions on affine algebraic varieties*, 5 September 2010, 6th international conference on Affine Algebraic Geometry in Osaka.

[6] Takashi Kishimoto, *An application of log minimal model program to affine algebraic threefolds*, 15 December, 高次元代数幾何の周辺.

[7] Takashi Kishimoto, *The construction of non-tame automorphisms on C^3 arising from pencils of rational plane curves*, 23 November 2009, 射影多様体の幾何のその周辺２００９.

[8] Takashi Kishimoto, *Group actions on affine cones*, 6 September 2009, 4th international conference on Affine

Algebraic Geometry in Osaka.

〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者　岸本　崇
(KISHIMOTO TAKASHI)
埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：20372576

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：