

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 7 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740005

研究課題名（和文） ファノ多様体の研究

研究課題名（英文） Reserch of Fano varieties

研究代表者

高木 寛通（TAKAGI HIROMICHI）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30322150

研究成果の概要（和文）：一つの成果はフランチェスコ・ズッコニー氏とのべき和多様体の研究である。5次デルペッツォ三様体と呼ばれる特別なファノ三様体上の有理曲線の研究をべき和多様体を通して三角的偶スピン曲線のモジュライ空間の研究に結びつけた。その中で最大の成果は、種数4の偶スピン曲線のモジュライ空間が有理的であることを示したことである。もう一つの成果は細野忍氏との行列式的カラビヤウ三様体のミラー対称性と射影幾何の研究である。ある二種のカラビヤウ三様体を構成し、それらが同じミラーを持つことを示した。それに基づきそれらの多様体の BPS 数を計算し、それらのいくつかを射影幾何的に解釈した。

研究成果の概要（英文）：One result is the research of varieties of power sums with Francesco Zucconi. We discovered a connection between behaviors of rational curves on quintic del Pezzo threefold and the moduli spaces of trigonal even spin curves through varieties of power sums. Our main result in this direction is that we showed the rationality of even spin curves of genus four. Another result is the research of the mirror symmetry and the projective geometry of certain determinantal Calabi-Yau threefolds with Shinobu Hosono. We constructed two types of Calabi-Yau threefolds and showed that they have the same mirror. Moreover, based on this we calculated the BPS numbers of them and interpreted some of them by the projective geometry.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：ファノ多様体、カラビヤウ多様体、べき和多様体、偶スピン曲線のモジュライ空間

1. 研究開始当初の背景

ファノ三様体の分類は、非特異の場合、ファ

ノ・イスコフスキーによる双有理写像を通じた分類に始まり、向井茂氏による単純代数群

の等質空間を用いた記述によって完成されたといつてよい。しかし特異点を許した場合の分類は、いくつかの興味深い場合に双有理写像を通じた分類が知られていたものの（当該研究者による貢献も大きい）、向井氏のような洗練された分類は今持って得られていない。それは特異点を許したファノ三様体が非常に数多く存在することが知られており、その全体像をどう捉えたらよいか分かっていないためである。

なお、向井氏は上記の非特異ファノ三様体の記述以外に、種数 1 2 のファノ三様体をべき和多様体として記述した。

2. 研究の目的

特異点を許したファノ三様体の分類を向井氏のような洗練された形で与えることである。より具体的に言えば、単純代数群の代わりに必ずしも簡約でない代数群を考え、その半等質空間を用いてファノ三様体を記述することである。

3. 研究の方法

当該研究者によって双有理写像を通して分類されていたファノ三様体について代数群の半等質空間を用いた記述を数多く見出した。それをより一般のファノ三様体に拡張することは今後の大きな課題である。また、リード予想「ファノ三様体の反標準線形系は高々標準特異点しか許さない $K3$ 曲面を含む」を証明することで $K3$ 曲面の幾何をファノ三様体の分類に生かすというのも有効な方法であると考えられる。この方法は実際非特異の場合では不可欠であった。

4. 研究成果

「研究の方法」で述べた内容は十分な成果であるが、引き続き研究して洗練させたいためまだ論文として発表していない。その代りその研究の副産物として得られたのが、上記「研究成果の概要」で述べた二つの研究成果である。

実際、べき和多様体の研究は、二つの指数 2 の終着特異点を許した種数 8 のファノ三様体の記述の研究に端を発している。このファノ三様体は非特異な種数 12 のファノ三様体と似ていたことから向井氏のべき多様体としての記述を念頭に置いて研究した。その結果、ファノ三様体をべき和多様体として記述することにも成功したが、むしろ、それを三角的偶スピン曲線のモジュライ空間の研究に役立てる方が有効であることに気付きその一般化に成功した。先に述べたように、この方向での最大の成果は、種数 4 の偶スピン曲線のモジュライ空間が有理的であることを示したことである。

また、細野氏と研究したカラビヤウ三様体は

単純代数群の半等質空間とその射影双対を用いて記述されるものであり、向井氏の記述と類似している。適切な単純代数群の半等質空間を見つければ二つのカラビヤウ三様体が得られるのは自然なことである。カラビヤウ三様体の BPS 数とはその上の曲線の本数を予想する物理的な量であるが、それが実際、射影幾何という古典的代数幾何のテクニックで理解できるというのは非常に興味深いことであると考えられる。

また、後藤陽介氏と共同で、非特異ファノ四様体のうち、2 つの(3,1)型端射線収縮射を持ち、その例外因子が互いに交わるものの可能性を分類し、新しい例を二つ構成した。この二つの例は有理的でない非特異ファノ四様体の新しい例になっていると予想しているがこれを示すのは今後の課題である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

以下、すべて査読あり。

1. Shinobu Hosono and Hiromichi Takagi: “

Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences I”, to appear in Journal of Algebraic Geometry

2. Hiromichi Takagi and Francesco Zucconi: “

Spin curves and Scorza quartics”, Math. Ann. 349 (2011), no. 3, 623-645.

3. Hiromichi Takagi and Francesco Zucconi:

“Geometries of lines and conics on the quintic del Pezzo threefold and its application to varieties of power sums”, Michigan Math. J. 61 (2012) 19-62

4. Alessio Corti, James McKernan and Hiromichi Takagi: “Saturated mobile bdivisors on weak del Pezzo klt surfaces”, in the book Flips for 3-folds and 4-folds, 111–120, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 35, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.

〔学会発表〕（計 10 件）

1. 高木寛通, Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruence, 名古屋大学代数幾何セミナー, 2011 年 7 月 4 日

2. 高木寛通, Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruence, in the conference ‘MMP and extremal rays’ (Mori60), 京都大学数理解析研究所, 2011 年 6 月 23 日

3. 高木寛通, Fano 多様体の問題, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 9 月 8 日

4. 高木寛通, 種数 4 偶スピン曲線のモジュライの有理性, 射影多様体の幾何とその周辺 2009, 高知大学理学部, 2009 年 11 月 22 日

5. 高木寛通, The moduli space of genus 4 spin curves is rational, Classification of Algebraic Varieties, Schiermonnikoog, Netherland, 2009年5月15日
6. 高木寛通, Q-Fano 3-folds and varieties of power sums, 代数幾何学国際研究集会「COECOWTokyo」, 東京大学大学院数理科学研究科, 2008年12月19日
7. 高木寛通, Spin curves and Scorza quartics, Algebraic Geometry in East Asia, KIAS, Nov, 2008
8. 高木寛通, Spin curves and Scorza quartics, 城崎代数幾何学シンポジウム, 2008年10月
9. 高木寛通, 三角的spin 曲線のScorza 4次超曲面とそのべき和多様体, 早稲田大学代数幾何セミナー, 2008年6月20日
10. 高木寛通, Scorza quartics of trigonal spin curves and their varieties of power sums, Universit'at Bayreuth, Lehrstuhl Mathematik VIII, January 30th, 2008.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/takagi.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高木 寛通 (TAKAGI HIROMICHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：30322150

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし