

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月 4日現在

機関番号：13301
 研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2008～2011
 課題番号：20740007
 研究課題名（和文） 多変数保型形式の空間上のヘッケ作用素の明示的跡公式
 研究課題名（英文） Explicit trace formulas for Hecke operators on spaces of modular forms of several variables
 研究代表者
 若槻 聡（WAKATSUKI SATOSHI）
 金沢大学・数物科学系・准教授
 研究者番号：10432121

研究成果の概要（和文）：本研究では、2次のジーゲルカusp形式の空間上のヘッケ作用素の跡の具体的な数値が明らかとなるような明示的公式を得るために、跡公式の幾何サイドの明示的な計算を行った。その結果、幾何サイドの各共役類の寄与についての算術的公式を得ることができた。その公式を元に自明な作用の跡つまり空間の次元に関する明示的公式において成果を得て、さらに特定のヘッケ作用素である対合の跡の計算を部分的に解決した。

研究成果の概要（英文）：In this study, we have explicitly calculated geometric sides of trace formulas, in order to derive concrete numerical values of traces of Hecke operators on spaces of Siegel cusp forms of degree two. Therefore, we have obtained arithmetic formulas for contributions of each conjugacy classes in the geometric side. Applying the formulas, we got some results on explicit formulas for dimension of spaces (traces of trivial actions) and we partly solved computations for traces of involutions as certain Hecke operators.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学, 整数論, 保型形式, 跡公式

1. 研究開始当初の背景

一変数保型形式のヘッケ作用素の明示的跡公式の研究は1950年頃から始まっており、EichlerとSelbergとHijikataたちの仕事の寄与が大きい。またその一般化であるヒルベルト保型形式のヘッケ作用素の明示的跡公式に関しては、Shimizuが大きく貢献

している。彼らの仕事以外にも多くの研究者によって研究されてきている。これだけ研究されている理由は、保型形式のヘッケ作用素の固有値を調べるのが保型形式と保型L関数の研究にとって明らかに重要であるためである。

ジーゲル保型形式の場合には、自明な作用の跡（空間の次元）を除いて、明示的跡公式

に関する研究結果がないため、ジーゲルカusp形式の空間に明示的跡公式の研究を推進することが強く望まれる。一方で、保型形式の空間の構造を研究する上で、主要な離散群に対する空間の次元（自明な作用の跡）を知ることは非常に重要なので、多くの先行研究が存在する。2次のジーゲル保型形式の空間に関する次元の研究はIgusaによる次数環から始まった。明示的次元公式を得るための大きな一般的な手法としては、セルバーグ跡公式を用いる解析的な手法と、リーマン・ロッホの定理を用いる幾何的な手法の二つが存在する。解析的な手法による主な研究としては、Morita, Christian, Arakawa, Hashimotoによる先行研究と近年に我々が推進している研究が存在する。また幾何的な手法では、YamasakiとTsushimaによる研究がある。

2. 研究の目的

本研究の目的は、多変数保型形式の空間上のヘッケ作用素の跡に対して明示的公式を与えることによって、保型形式の空間の構造と保型L関数の性質を研究することが目的である。我々の目指す明示的跡公式とは、具体的な数値まで計算できる形の公式のことを意味する。本研究は多変数保型形式の中でも最も良く研究されている対象の一つであるジーゲルカusp形式を研究する。ヘッケ作用素の固有値によってジーゲルカusp形式の保型L関数は定義されるため、その跡の値が一般的に分かることは、ジーゲル保型形式とそのL関数の研究において大きな進展となる。本研究の具体的な目標は、

- (1) いくつかの主要な数論的離散群についての2次のジーゲルカusp形式の空間上のヘッケ作用素の明示的跡公式の決定、
- (2) レベルが3以上の主合同部分群についての一般次数のジーゲルカusp形式の空間の明示的次元公式の予想の解決、
- (3) 明示的跡公式の低いウェイトへの拡張、の三つである。自明な作用の跡は空間の次元となることから、明示的次元公式も本研究の目的に含まれる。

3. 研究の方法

本研究では、下記のような方法によって明示的跡公式を研究した。

- (1) Godementの公式と従来の計算手法。正則ジーゲルカusp形式から成る正則ジーゲルカusp形式から成るヒルベルト空間上の再生核に関する基本領域上での積分によってヘッケ作用素の跡が記述

される(Godementの公式)。そして、主にMoritaとHashimotoの仕事によって、スカラー値の場合かつ自明な作用の跡(空間の次元)に関して、その積分を共役類ごとの寄与に分解して、各共役類の寄与を明示的に計算することができていた。本研究ではベクトル値の場合を含むヘッケ作用素の跡に彼らの手法を一般化した。

- (2) 軌道積分に関する極限公式。基本領域がコンパクトな場合における保型形式の空間の次元公式がLanglandsによって定式化された。そのときの道具がHarish-Chandraの半単純軌道積分に関する極限公式であった。本研究では基本領域が非コンパクトな場合を扱っているので、ダンピングファクター付きのユニポテント軌道積分を扱うことが重要となる。そこでRossmannとBozicevicのユニポテント軌道積分に関する極限公式を用いた。ダンピングファクター付なので直接に極限公式を適用することができない。ダンピングファクターのパラメータに対する挙動を調べて、軌道積分の値を用いて評価することによって極限公式が適用可能となった。
- (3) Arthurの L^2 レフシェッツ跡公式。Arthurは彼の不変跡公式の理論を用いて L^2 コホモロジーに関するレフシェッツ跡公式を与えた。この公式は保型形式(非正則も含む)の複数の空間上のヘッケ作用素の跡の線型結合だと思える。離散群の共役類に関する既知の情報を用いることで、2次の斜交群に関するこの公式を明示的に計算することができる。これにより、2次のジーゲルカusp形式の空間を含む複数の空間上の明示的跡公式を得ることが可能となった。
- (4) Labesse-Langlandsの安定化に関連した公式。Labesse-Langlandsによる $SL(2)$ のユニポテント項の安定化の技術は、Hammond-Hirzebruchによるヒルベルトカusp形式の空間の次元への清水L関数の特殊値の寄与の計算の一般化だと見なすことができる。そのため、彼らの公式は明示的計算に適用可能であり、我々は擬ユニポテント元の寄与の計算に用いた。

4. 研究成果

まず最初の成果としては「3. 研究の方法」の(1)によって、2次の正則ジーゲルカusp形式の空間上のヘッケ作用素の跡を共役類ごとの寄与に分割することができた。そして「3. 研究の方法」の(1)と(2)によ

って幾何サイドの各共役類の寄与についての算術的公式を得ることができた。そのため、明示的跡公式を得るための残りの問題は大域的な値を明らかにすることに絞られた。

次に「3. 研究の方法」の(3)を用いた研究による成果を述べたい。その公式を明示的な形にまで計算し、我々の明示的次元公式と組み合わせることで、未知であった非正則な2次のジーゲルカusp形式の空間の明示的次元公式を得ることに成功した。また更にSchmidtによる局所新形式の理論を用いることで、アーサー予想の仮定下で低いウェイトへ既知の公式を拡張できることが明らかとなった。仮定が必要なので定理とはならないが低いウェイトについての公式の目標が明確になった。

Atkin-Lehner involution と呼ばれるヘッケ作用素の一種である対合の跡についての明示的跡公式の研究した。特に擬ユニポテント元の寄与の明示的公式を得るために大域的な値を調べた。その結果、この大域的な値は清水L関数の特殊値によって記述されることが明らかになった。さらに「3. 研究の方法」の(4)を用いることで、実2次元上の2次指標の分類とそれらの導手の決定を行えば、その大域的な値が分かり、明示的公式を得ることができると分かった。いくつかの限定的な場合には、すでに明示的公式を得ており、より一般的に公式を与えることが残りの問題となっている。この研究は他のヘッケ作用素の跡における擬ユニポテント元の寄与の明示的計算にも適用可能である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① S. Wakatsuki, Dimension formulas for spaces of vector-valued Siegel cusp forms of degree two, *J. Number Theory* 132 (2012), 200–253, 査読有.
DOI: 10.1016/j.jnt.2011.07.002
- ② S. Wakatsuki, カusp形式の空間の次元についての法2の合同式, 数理解析研究所講究録 1767 (2011), 188–197, 査読無.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1767.html>
- ③ Y. Ohno, T. Taniguchi, S. Wakatsuki, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* 131 (2009), 1525–1541, 査読有.
DOI: 10.1353/ajm.0.0080

- ④ T. Ibukiyama, S. Wakatsuki, Siegel modular forms of small weight and the Witt operator, *Quadratic forms—algebra, arithmetic, and geometry*, 189–209, *Contemp. Math.* 493, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 査読有.
<http://www.ams.org/bookstore-getitem/item=CONM/493>
- ⑤ S. Wakatsuki, On traces of Hecke operators on spaces of Siegel cusp forms of degree two, 数理解析研究所講究録 1617 (2008), 193–205, 査読無.
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/140162>

[学会発表] (計8件)

- ① S. Wakatsuki, On coefficients of unipotent orbital integrals for the symplectic group of rank 2, *Oberseminar Globale Analysis, Raum 1.008*, Mathematik-Zentrum, Endenicher Allee 60, University of Bonn, 2012年3月19日。(ドイツ)
- ② 若槻 聡, 二元二次形式の空間に関するL関数とエンドスコピー, 2012 早稲田整数論研究集会, 早稲田大学, 2012年3月19日。(東京都)
- ③ 若槻 聡, On L-functions for the space of binary quadratic forms, *Workshop on L-FUNCTIONS*, 九州大学, 2011年4月22日。(福岡県)
- ④ 若槻 聡, カusp形式の空間の次元についての法2の合同式, 保型形式と関連する跡公式, ゼータ関数の研究, 京都大学数理解析研究所, 2011年1月21日。(京都府)
- ⑤ 若槻 聡, On congruences for dimensions of spaces of cusp forms, 神戸整数論集会, 神戸大学, 2010年1月15日。(兵庫県)
- ⑥ S. Wakatsuki, Multiplicity formulas for discrete series representations of $Sp(2, \mathbb{R})$, *Hauptseminar Modulformen*, Heidelberg, 2009年7月8日。(ドイツ)
- ⑦ S. Wakatsuki, Explicit multiplicity formulas of large discrete series representations of $Sp(2, \mathbb{R})$, A symposium in honor of Professor Tomoyoshi Ibukiyama on the occasion of his 60th birthday, *Explicit Structures in Modular Forms and Number Theory*, Kinki University, Japan, 2008年9月5日。(大阪府)
- ⑧ 若槻 聡, $Sp(2; \mathbb{R})$ の大きな離散系列表現に関する重複度公式について, 第3回福

岡数論研究集会, 九州大学, 2008 年 8
月 27 日. (福岡県)

[その他]

ホームページ等

<http://wakatsuki.w3.kanazawa-u.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

若槻 聡 (WAKATSUKI SATOSHI)

金沢大学・数物科学系・助教

研究者番号: 1 0 4 3 2 1 2 1

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし