

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 22 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20740008

研究課題名（和文） 算術的スキーム上の代数的サイクルの研究

研究課題名（英文） Research on algebraic cycles on arithmetic schemes

研究代表者

佐藤周友（SATO KANETOMO）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：50324398

研究成果の概要（和文）：

算術的スキーム、特に p 進整数環上の正則半安定族上の 1 サイクルの Chow 群の有限性と数論的な性質をコホモロジー的な手法で研究する。この手法ではエタールコホモロジーへのサイクル写像を主に用い、サイクル写像の単射性あるいは全射性を示すことによりサイクルの性質を引き出す。これにより、1 サイクルの Chow 群の 1 進的な性質がかなり一般的な場合に明らかとなり、 p 進体上の特殊な有理曲面の場合には 0 サイクルの Chow 群を具体的に計算することも可能になった。

研究成果の概要（英文）：

We study arithmetic properties, including finiteness, of the Chow group of 1-cycles on arithmetic schemes, especially regular semistable families on p -adic integer rings. The main tool in this approach is the cycle class map to the étale cohomology. We derive properties of cycles by showing the injectivity and surjectivity of this cycle class map. In fact, we obtained a strong l -adic property of the 1-cycles in some quite general situation, and were able to compute the Chow group of 0-cycles on some special rational surface over a p -adic field.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2008 年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 2009 年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2010 年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,500,000 | 750,000 | 3,250,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学

1. 研究開始当初の背景

多様体の Chow 群は閉部分多様体の形式和のなす自由アーベル群を有理同値とよばれ

る同値関係で割ることによって定義される。コンパクトリーマン面の因子類群のようなものを代数幾何的な状況（代数的スキーム

上)で考えていると思って頂きたい。

Chow 群は代数幾何において登場した不変量であり、それ自体が興味深い対象である。しかしながら、因子類群の場合とは異なり、曲面上の0サイクルのChow群の場合には(この場合ですら既に)、その構造は非常に複雑なものであることが、Mumfordによって1970年代に示されていた。

さて、1980年代初頭に提出されたBloch-Beilinson予想は、およそ次のことを予言している：

(a) Chow群(より正確にはChow群を含む高次Chow群)は、ある種の普遍性を持つコホモロジー関手である。(混合モチーフの哲学)

(b) 算術的スキームのChow群および高次Chow群は有限生成アーベル群であり、そこから得られる情報(階数、ねじれ部分の位数、単数基準の値)によって多様体のゼータ関数の特殊値が記述される。(ただし最初の有限生成性に関する部分は、1970年代に提起されたBass予想である。)

これらの途方もない予想によって、Chow群は整数論(数論幾何)において重要な不変量であることが広く意識されるようになった。これらの予想は、幸か不幸か、Chow群を研究する多くの数学者に甚大な影響を与えたが、現在大きく発展しているのは「代数幾何(スキーム)を、線型代数やホモトピー代数などの演算で理解しようと試みる」という、いわば機械的な方向性である。これは上記の予想のうち(a)を解決しようと企むものである。(ちなみに(a)は、厳密な意味ではまだ解決されていない。)

予想(a)に比べて、予想(b)はChow群その

ものの構造や性質に深く関わっている。残念ながら予想(b)については、世界的に見て、それを解決するための十分な進歩があったとはまだ言えない。言い方を変えると、予想(b)はそれだけ難しい。

2. 研究の目的

本研究は混合モチーフなどの圏論的・抽象的な立場からChow群を俯瞰する(遠くから眺める)のではなく、基礎環を p 進体あるいは p 進整数環などの数論的に重要な環に制限した場合に、Chow群という不変量の構造あるいは数論的な性質に深く触れることを目的とする。より具体的には、研究目的は次の2つである。

(1) p 進整数環上の正則半安定族上の1サイクルのChow群の構造(例えば有限性など)と数論的性質を解明する。

(2) 上記の(1)で得られた結果を p 進体上の多様体の0サイクルのChow群に応用する。

3. 研究の方法

Chow群からエタールコホモロジーにはサイクル写像という自然な準同型写像がある：

$$(\text{Chow群}) \rightarrow (\text{エタールコホモロジー})$$

体上の多様体のサイクル写像ではなく、 p 進整数環上の正則スキームのサイクル写像を調べるところが本研究において本質的なアイデアの1つである。上記のサイクル写像は本研究において重要な道具であるが、サイクル写像を考える際には、エタールコホモロジーの係数として l 進的なもの(l は p と異なる素数)と p 進的なものの両方を考える必要がある。 l 進的な係数としては、古典的なTate twistが相応しい。これは1の l べき根のE

タール層のテンソル積で定義される、単純だが奥の深い層である。一方、 p 進的なものとしては私が定義したエタール層の複体 (p -adic Tate twist) を用いる。これが本研究の第 2 のアイデアである。

4. 研究成果

(1) p 進整数環上のスキーム X の 1 サイクルの Chow 群 $\text{CH}_1(X)$ の構造を明らかにすることを目標とした。この方向で大きな進展があり、 l 進的な構造を解明することができた。これは東京大学大学院数理科学研究科の斎藤秀司氏との共同成果であり、雑誌 *Annals of Mathematics* において論文が出版されている。

(2) p 進整数環上の正則局所環のブラウア一群の分岐の様子を詳しく調べることにより、3 次式 $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + aT_3^3 = 0$ で定義される p 進体上の曲面 S の 0 サイクルの Chow 群 $\text{CH}_0(S)$ の構造を具体的に決定した。これは斎藤秀司氏との共同成果であり、雑誌に論文を投稿中である。

(3) サントミックコホモロジーを用いた具体的な計算によって、 p 進体上の楕円曲面 E で 0 サイクルの Chow 群 $\text{CH}_0(E)$ の捩れ部分が有限であるような例を構成した。これは北海道大学大学院理学研究院の朝倉政典氏との共同成果であり、雑誌に論文を投稿中である。

(4) 有限体を剰余体とする等標数ヘンゼル正則局所環の分数体の可換類体論を、剰余標数と素な整数を法とする場合に完成させた。この研究成果は雑誌 *Mathematische Annalen* において出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- (1) SAITO Shuji, SATO, Kanetomo
A finiteness theorem for zero-cycles over p -adic fields.
Ann. of Math. **172**, 1593--1639 (2010)
査読有
- (2) SAITO Shuji, SATO, Kanetomo
A p -adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes.
Documenta Math. Extra Volume: Andrei Suslin's Sixtieth Birthday, 525--594 (2010)
査読有
- (3) SATO, Kanetomo
 l -adic class field theory for regular local rings.
Math. Ann. **344** 341--352 (2009)
査読有

[学会発表] (計 12 件)

- (1) SATO, Kanetomo
On 1-cycle class maps over p -adic integer rings.
平成 22 年 12 月 13 日(月)
International Workshop on Motives in Tokyo, Part 6 (東京大学)
- (2) 佐藤周友
On the Chow groups of 0-cycles of varieties over p -adic fields.
平成 22 年 10 月 26 日(火)
代数幾何学城崎シンポジウム
(城崎大会議館)
- (3) 佐藤周友
On the image of p -adic regulator

平成 22 年 8 月 6 日(金)

数論幾何学ワークショップ 2010

(沖縄県那覇市)

(4) 佐藤周友

Syntomic cohomology and Beilinson's
Tate conjecture for K_2 (その 2)

平成 22 年 8 月 3 日(火)

数論幾何学ワークショップ 2010

(沖縄県那覇市)

(5) 佐藤周友

Syntomic cohomology and Beilinson's
Tate conjecture for K_2 (その 1)

平成 22 年 8 月 2 日(月)

数論幾何学ワークショップ 2010

(沖縄県那覇市)

(6) 佐藤周友

p 進体上の多様体のチャウ群

平成 22 年 5 月 7 日(金)

整数論・保型形式セミナー (大阪大学)

(7) 佐藤周友

ガロアコホモロジー

平成 21 年 8 月 18 日(火)

整数論サマースクール (京都市左京区)

(8) SATO, Kanetomo

Higher cycle class maps for p -adic
etale Tate twists.

平成 21 年 5 月 26 日(火)

玉原数論幾何研究集会

(東大玉原国際セミナーハウス)

(9) 佐藤周友

算術的スキームの p 進的コホモロジ
ーとサイクル写像.

平成 21 年 3 月 27 日(金)

日本数学会代数学分科会特別講演

(東京大学)

(10) SATO, Kanetomo

Higher cycle class maps for p -adic
etale Tate twists

平成 20 年 7 月 2 日(水)

研究集会「代数的 K 理論と motive 理論の
現状」(京大数理研)

(11) SATO, Kanetomo

What is motive theory?

平成 20 年 6 月 30 日(月)

研究集会「代数的 K 理論と motive 理論の
現状」(京大数理研)

(12) 佐藤周友

p 進数体上の多様体の 0 サイクルの
有限性について.

平成 20 年 5 月 27 日(木)

談話会(広島大学)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤周友 (SATO KANETOMO)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号: 50324398