

平成22年 5月26日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2009

課題番号：20740010

研究課題名 (和文) 双曲的曲線の数論的基本群の研究

研究課題名 (英文) Research of arithmetic fundamental groups of hyperbolic curves

研究代表者

星 裕一郎 (HOSHI YUICHIRO)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：50456761

研究成果の概要 (和文)：望月新一氏との共同研究により、組み合わせ論的カスプ化の単射性部分を証明して、その数論的応用として、数体や p 進局所体上の双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の忠実性が得られた。また、双曲的曲線に対してモノドロミー充満性という概念を導入して、モノドロミー充満であるような種数 0 の双曲的曲線に対して、従来知られていたものよりも強い形の遠アーベル幾何学的結果を証明することができた。最後に、数体や p 進局所体上の双曲的曲線に対して、一般には副 p 切断予想が成立しないことを証明した。

研究成果の概要 (英文)：By a joint work with Shinichi Mochizuki, we proved the injectivity portion of the combinatorial cuspidalization; moreover, as an arithmetic application of this injectivity, we obtained the faithfulness of the outer Galois representations associated to hyperbolic curves over number or p -adic local fields. Next, I introduced the notion of monodromic fullness for hyperbolic curves and proved an anabelian conjecture-type result for certain monodromically full hyperbolic curves of genus zero. Finally, I proved that in general, the pro- p section conjecture for hyperbolic curves over number fields, as well as p -adic local fields, cannot be resolved in the affirmative.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：(1)遠アーベル幾何 (2)数論的基本群 (3)双曲的曲線 (4)配置空間 (5)外 Galois 表現 (6)組み合わせ論的カスプ化 (7)モノドロミー充満 (8)Galois 切断

1. 研究開始当初の背景

(1) Grothendieck 予想の組み合わせ論版については、望月新一氏による惰性的標点付安定曲線型外表現に対する結果が知られていた。組み合わせ論的カスプ化の単射性部分については、これまでに、David Harbeter 氏、Leila Schneps 氏、伊原康隆氏、上野亮一氏、角皆宏氏、金子昌信氏、高尾尚武氏、中村博昭氏、松本眞氏、望月新一氏などといった方々によって先行研究が行われていた。しかし、もっとも困難な場合である副有限な状況での固有な曲線に対する完全な単射性ははまだ証明なされていなかった。また、数体や p 進局所体上の双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の忠実性については、与えられた曲線が射影直線引く 3 点の場合には Belyi 氏によって、与えられた曲線がアフィンな場合には松本眞氏によって証明がなされていたが、与えられた曲線が固有な場合には、そのような忠実性が成り立つかどうかは知られていなかった。

(2) モノドロミー充滿な双曲的曲線については、1990 年代に玉川安騎男氏、松本眞氏によってその豊富な存在が証明されて以降、星の知る限り、組織的な研究は行われていなかった。一方、従来の形の Grothendieck 予想、つまり、数体(実際にはより強く一般化劣 p 進体)上の双曲的曲線の同型類がその曲線に付随する外 Galois 表現によって完全に決定されるであろう、という予想は、中村博昭氏、玉川安騎男氏、望月新一氏らの研究によって既に肯定的に解決していた。また、今回得られたモノドロミー充滿な種数 0 の双曲的曲線に対する強い形の遠アーベル幾何学的事実は、虚数乗法を持たない数体上の楕円曲線の同型類がその曲線の様々な位数の等分点たちの定義体によって決定される、という事実の種数 0 での類似と考えられるのであるが、その事実は、望月新一氏によって、Faltings 氏による Tate 予想の肯定的解決の帰結として証明されていた。

(3) 数体あるいは p 進局所体上の双曲的曲線に対する切断予想の単射性部分に対しては、切断予想を提唱した本人である Grothendieck 氏による議論により副有限な場合に、また、より強く、望月新一氏による Grothendieck 予想の肯定的解決の帰結として副 p な場合にも成立することが知られていた。しかし、一方の全射性部分に関する研究は、その予想が成立するいく

つかの例が確認されているのみで、星の知る限り、これまでに一般的かつ組織的な研究はほとんど行われていなかった。

2. 研究の目的

(1) 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分、特に、いまだ未解決であった、副有限な状況での完全な単射性を証明することを目的とした。

(2) モノドロミー充滿な双曲的曲線の基礎理論の整備を目的とした。

(3) 数体及び p 進局所体上の双曲的曲線に対する副 p 切断予想に関する一般的な事実を証明することを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分の証明の方法は、ノード非退化な外表現に対する組み合わせ論的 Grothendieck 予想型の事実に、本研究の先行研究である望月新一氏による組み合わせ論的カスプ化の議論を組み合わせる、というものである。また、数体や p 進局所体上の双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の忠実性の証明の方法は、双曲的曲線の対数的 3 次配置空間内の射影直線引く 3 点の存在と、先述の組み合わせ論的カスプ化の単射性を組み合わせることによって、問題の忠実性を、射影直線引く 3 点に付随する外 Galois 表現の忠実性に帰着させる、というものである。

(2) モノドロミー充滿な種数 0 の双曲的曲線に対する強い形の遠アーベル幾何学的事実の証明の方法は、種数 0 の双曲的曲線に対する副 1 普遍モノドロミーの幾何学的部分がほとんど単射であるという事実を用いて、そのモノドロミーの像に、従来知られていた遠アーベル幾何学的事実を適用する、というものである。また、種数 0 の 4 点付き曲線のモジュライ空間が射影直線引く 3 点であり、その上の普遍曲線族が射影直線引く 3 点の 2 次配置空間であること、及び、玉川安騎男氏、松本眞氏による議論から、射影直線引く 3 点の上の Fermat 曲線による被覆に関して、射影直線引く 3 点の上の点がどのようなファイバを持つかを観察すれば、与えられた $(0, 4)$ 型の双曲的曲線がモノドロミー充滿であるかどうかを確認することができる。 $(0, 4)$ 型の双曲的曲線のモノドロミー充滿性の充分条件の研究は、それを実行すると

いうものである。

(3) 副 p 切断予想の反例を構成する方法は、素数 p が正則である場合には射影直線引く 3 点に付随する副 p 外 Galois 表現が副 p 自由な商を経由する、という事実を用いて、ある双曲的曲線の副 p 基本完全系列の切断を豊富に構成する、というものである。また、副 p 基本完全系列が無限に多くの切断の共役類を持つようなある数体上の固有な双曲的曲線の存在の証明の方法は、先述の豊富な副 p 基本完全系列の切断の存在に加えて、Fermat 曲線の Jacobi 多様体がある場合には無限に多くの有理点を持つ、という事実を適用するというものである。

4. 研究成果

(1) 望月新一氏との共同研究により、ノード非退化な外表現という概念を導入して、その基本的な性質を研究した。特筆すべき事項として、そのような外表現に対する組み合わせ論的 Grothendieck 予想型の結果を得て、それを用いることで、組み合わせ論的カスプ化の単射性部分の証明を行った。そして、その数論的応用として、数体や p 進局所体上の双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の忠実性を得た。

(2) モノドロミー充満であるような数体上の双曲的曲線に対する一般的な性質をいくつか証明した。モノドロミー充満であるような種数 0 の双曲的曲線に対して、従来知られていたものよりも強い形の遠アーベル幾何学的結果、より正確には、モノドロミー充満であるような種数 0 の双曲的曲線の同型類は、その曲線に付随する副 L 外 Galois 表現の核のみで完全に決定される、という事実を証明することができた。また、 $(0, 4)$ 型の双曲的曲線がモノドロミー充満になるための充分条件を考察して、特に、有理数体上の $(0, 4)$ 型の分裂双曲的曲線が有限個を除いた任意の素数 l に対して l モノドロミー充満となるための必要充分条件を得た。一方、数体 k 、素数 l 、 $2g-2+r$ が 1 以上であるような非負整数の組 (g, r) を固定したときに、 k 上の (g, r) 型の双曲的曲線であって、その曲線に付随する副 l 外 Galois 表現の核が同一であるようなものの同型類は高々有限個しかない、という事実を証明した。

(3) 数体や p 進局所体上の双曲的曲線に対して、一般には副 p 切断予想が成立しないことを証明した。また、副 p 基本完全系列が無限に多くの切断の共役類を持つようなある数体上の固有な双曲的曲線が存在することを証明することによって、副 p 基本完全系列の切断の共役類の有限性からの Mordell 予想(現在では Faltings 氏の定理)のアプローチが不可能であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

(1) 星裕一郎、Absolute anabelian cuspidalizations of configuration spaces of proper hyperbolic curves over finite fields、Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences、査読有、Vol.45、2009 年、661-744

[学会発表] (計 6 件)

(1) 星裕一郎、Existence of nongeometric pro- p Galois sections of hyperbolic curves、The arithmetic of fundamental groups、2010 年 2 月 11 日、ハイデルベルグ大学 (ドイツ)

(2) 星裕一郎、Galois-theoretic characterization of isomorphism classes of monodromically full hyperbolic curves of genus zero、Torsion of Abelian Schemes and Rational Points on Moduli spaces、2010 年 1 月 27 日、ボルドー第一大学 (フランス)

(3) 星裕一郎、On the combinatorial cuspidalizations and the faithfulness of the outer Galois representations of hyperbolic curves (joint work with Shinichi Mochizuki)、Anabelian Geometry、2009 年 8 月 27 日、ケンブリッジ大学 (イギリス)

(4) 星裕一郎、遠アーベル幾何学について、第六回城崎新人セミナー、2009 年 2 月 18 日、城崎町大会議館

(5) 星裕一郎、双曲的曲線の組み合わせ論的カスプ化(望月新一氏との共同研究)、超平面配置のさまざまな側面、2009年2月12日、神戸大学

(6) 星裕一郎、双曲的曲線の組み合わせ論的カスプ化と外ガロア作用の忠実性(望月新一氏との共同研究)、代数的整数論とその周辺、2008年12月9日、京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

星 裕一郎 (HOSHI YUICHIRO)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：50456761