

機関番号：14301

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740012

研究課題名 (和文) 代数閉体上定義された代数多様体の特異点解消

研究課題名 (英文) Resolution of Singularities of an algebraic varieties defined over an algebraically closed field

研究代表者

川ノ上 帆 (KAWANOUE HIRAKU)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：50467445

研究成果の概要 (和文) : 代数幾何学において重要であるが長年未解決である正標数の特異点解消の問題に向け、本研究者の提唱した IFP というプログラムを発展させる形で研究を進めた。IFP の枠組みで特異点解消の為の不変量を定義し、爆発を経ない状態ではこの不変量が理想的な形で機能することを示した。また爆発に際して不変量が適切に振舞う為の要件を解析することで、狭義変換を用いるより良い不変量の可能性を見出し関連する部分的結果を得た。

研究成果の概要 (英文) : To solve the problem of resolution of singularities, a longstanding open problem in algebraic geometry, the author developed his own program, called IFP. He defined an invariant for resolution in the framework of IFP, and show that it behaves quite well in the situation before blowups. Moreover, by examining the properties for the expected behavior of invariants through blowups, he found the possibility of the better invariant using strict transforms, and obtained some partial results concerning it.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、特異点解消、正標数、IFP

1. 研究開始当初の背景

- (1) 標数0の場合の特異点解消は廣中平祐先生により1960年代に確立され、その有用性は代数幾何学において広く認識されていた。実際、特異点解消は代数幾何学とりわけ双有理幾何学において基本的な道具を提供するのみならず、整数論、代数解析、学習理論など幅広い分野に豊富な応用を持つ。しかし正標数の特異点解消についてはまだ三次元の場合までしか

解決していなかった。一般次元については有望なアプローチすら認識されておらず、ほぼ手つかずの状態であった。

- (2) 標数0の特異点解消自体も証明の長大さと難解さで有名であったが、これは1990年代から複数の研究者によって構造的な簡易化がなされ、その論理構造及び鍵概念である最大接触超曲面が果たす役割が明確になった。それに伴い、正標数の場合の最大接触超曲面の不在が帰結する困

難の大きさや標数0と正標数での状況の違いも改めて認識された。

- (3) 本研究者は学位論文において、先頭生成系と呼ばれる正標数でも存在する最大接触超曲面の適切な代替概念を導入し、それによって上記の標数0の簡易化された証明を任意標数に拡張するという方針を提示した。同時に、理論的なインフラ整備を進めた。このアプローチがアイデアリスティックフィルトレーションプログラム (IFP、詳細は3. で述べる) と呼ばれるものである。
- (4) 上記学位論文の執筆以前から、IFP の内容に深く共鳴を示して下さった米国の松木謙二氏と共同で研究を進めている。
- (5) ほぼ同時期に廣中平祐先生やスペインのヴィラマイヨール氏、米国のヴロダーク氏もそれぞれ異なる正標数任意次元の特異点解消に対するアプローチを発表した。振り返ると、この分野の研究が活発になる黎明期にあったと言える。

2. 研究の目的

- (1) 既に触れた通り、正標数一般次元の特異点解消の問題を解決すること、或いはそれに可能な限り近づくことが本研究の目的である。もう少し正確に述べるなら、IFP のアプローチを発展させることによって代数閉体 (或いは完全体) 上定義された代数多様体の特異点解消を与える標数によらないアルゴリズムを与えることが最終目的である。副産物として標数0の特異点解消のより良いアルゴリズムが得られることも期待している。
- (2) IFP に沿って現れる不変量の基本構成単位については、既にこれまでの研究で上半連続性や爆発の中心の非特異性の保証など基礎的な性質が確かめられている。それ故、特異点解消の為の不変量も爆発を経る前は期待通り振舞うと予想される。そこで、この予想を確認し爆発前の不変量を確立する一方で、例外因子の情報を組込んで爆発後の不変量を構成するというアルゴリズム的な実装部分が具体的な目的となる。

2. 研究の方法

- (1) 申請者の提唱したアイデアリスティックフィルトレーションプログラム (IFP) に従って研究を進める。少し IFP について概説する。従来の標数0の特異点解消に

おいては関数と期待される重複度の組を最大接触超曲面に制限して変形してゆくことで不変量を定義する。この組の集合に代数的構造を付加したアイデアリスティックフィルトレーションという新しい対象を導入し、微分的飽和などのしかるべき条件の下でその代数構造を解析すると、標数に依らない最大接触超曲面の代替物として自然に先頭生成系という概念が現れる。そこで上記の変形過程を先頭生成系が大きくなっていくように対象を太らせていく過程だと読み替えることで、標数0のアルゴリズムや不変量を任意標数で機能するように翻訳するというのがIFPの中心教義である。

- (2) しかし、先頭生成系は必ずしも非特異ではない局所超曲面の集合に対応している為、上記の翻訳は一筋縄ではいかない。特に爆発の過程で現れる例外因子の取り扱いについては直接の翻訳が難しく、新たな着想が必要である。この部分は迂遠であっても様々な例を調べ試行錯誤を通じてアルゴリズムを改良していく他に手はないと考えている。
- (3) 一方で、対象を太らせる過程については、完備化レベルでの記述は確定しているがザリスキ局所レベルでの記述はまだ得られていない。ザリスキ局所レベルでの具体的な記述を得るのが最も望ましいが、ある程度抽象的な記述でもよければヘンゼル化を経由して降下するという可能性も考えられる (森重文氏の示唆)。この部分についてはアルゴリズムの他の部分との兼ね合いを両方の可能性を考慮に入れて研究を進める。
- (4) 例外因子がない場合については不変量の上半連続性が示されているが、例外因子がある場合については不変量の値によっては上半連続性を保証するのが難しい場合がある。そこで当面は特異点解消の弱形である局所一意化の証明を目指す。局所一意化とは任意の附値に沿った特異点解消という意味であり、この問題を考える場合には張り合わせのデータをあまり考えなくてよいので少しハードルが低い。そこで、まずは局所一意化を与える不変量を目指し、しかる後に本来の特異点解消にも機能するように不変量を改良してゆく、という手順で研究を進める。
- (5) 米国パーデュー大学の松木謙二氏と共同で研究を進める。電話や電子メールで連絡を密にとり、互いに訪問して議論を進

める。またスペインのヴィラマイヨール氏やオーストリアのハウザー氏を始めとする海外の同分野の研究者とも議論し、情報交換を進める。国内の関連分野の研究者とも交流し、研究上の示唆や応用の可能性について情報収集する。

4. 研究成果

(1) 正標数の特異点解消の問題の最終解決には至らなかったが、IFP を推進して解決に近づくという意味では進展があった。具体的には以下の通りである。

- ① 爆発前の不変量を確定し期待するような振舞いをすることを確認した。
- ② 特別な場合について完備化レベルではなくザリスキ局所レベルでの対象の変形の具体的な記述を得た。
- ③ 素朴に定義した不変量が悪い挙動を示す原因を検出し、これを克服する新しいアルゴリズムの着想を得た。またこの方向で部分的結果を得た。

以下時系列に従い上記の進展及び関連事項について詳述する。

(2) 2008年度は爆発前の不変量が期待通り機能することを示した。また局所一意化を与える不変量の候補を構成した。これらは5. 学会発表②にあるワークショップにおいて発表した (PDF が5. その他のURL から入手可能)。ここで上記のアルゴリズムが本来の特異点解消には十分でない点も反例付きで説明されている。

(3) 2008年度に先頭生成系が1元だけからなる場合についてザリスキ局所レベルでの対象の変形の具体的な記述を得、上記ワークショップで発表した。

(4) 2009年度に上記の局所一意化の為の不変量がうまく機能しない例、即ち爆発を経て不変量の値が増加してしまう例を発見する。さらにこの例を始め多くの例を解析することによって、先頭生成系を微分して得られる元が持つ例外因子の情報が不変量の挙動の悪さを惹き起こしていることを突き止める。

(5) 2010年度は上記の不変量の候補を修正することに費やした。なかなか進展がなかったが、秋頃にオーストリアに訪問しハウザー氏と議論を重ねる中で、狭義変換

を用いるアルゴリズムに解決の糸口があることに気付いた。参考までに書くと、通常の標数0のアルゴリズムでは狭義変換でなく弱変換と呼ばれるものを用いる。狭義変換の方が幾何的な意味は明確なのであるが、弱変換が代数的に扱いやすいのに比べて狭義変換は扱いにくいというのが弱変換を用いる理由である。しかし狭義変換を用いたアルゴリズムならば先頭生成系の微分が持つ例外因子の情報が寄与しないので現在考えている障害は回避できると思われる。

(6) そこで標数0で機能する狭義変換を用いたアルゴリズムを構成し、任意標数に一般化するという筋道で研究を進めた。狭義変換を考えるためにアイデアリステックフィルトレーションの中の例外因子の単項式の集合を制御する必要が出てくる。この方向に関して、一般にこの集合が有限生成とは限らないことの証明 (つまり有限生成ではない例の構成) 及び根底的飽和という条件を課した下での有限生成性の証明を得た。これらの部分は狭義変換を用いるアルゴリズムが確立してから論文にまとめる予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① H. Kawanoue and K. Matsuki, Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic (The Idealistic Filtration Program) Part II., Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有、Vol. 46、No. 2、2010、359–422

[学会発表] (計 5 件)

- ① Hiraku Kawanoue, Two small theorems concerning permutations, ワークショップ “Linz-Wien Workshop in Singularity Theory and Related”, 2010年11月27日、オーストリア Krems
- ② Hiraku Kawanoue, On Idealistic Filtration Program, コンファレンス “SING2010 --- Resolution of Singularities Problems”, 2010年3月15日、スペイン Tordesillas

- ③ 川ノ上 帆、Toward resolution of singularities in positive characteristic、国際研究集会 “Algebraic Geometry in Characteristic p and Related Topics”、2010年2月18日、東京大学 数理科学研究科
- ④ 川ノ上 帆、Introduction to idealistic Filtration Program, Lecture 1 and 5、ワークショップ “Resolution of singularities”、2008年12月1日、5日、京都大学 数理解析研究所
- ⑤ 川ノ上 帆、Toward resolution of singularities for arbitrary characteristics、代数幾何学城崎シンポジウム、2008年10月22日、豊岡市 城崎町 城崎大会議館

[その他]

学会発表④のスライド:

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/proj08-mori/>

本研究者の研究の概要:

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/kawanoue.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川ノ上 帆 (KAWANOUE HIRAKU)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号: 50467445

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし