

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 24 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008年度～2011年度

課題番号：20740013

研究課題名（和文） 岩澤理論の様々な一般化について

研究課題名（英文） On various generalizations of Iwasawa theory

研究代表者

落合理（OCHIAI TADASHI）

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90372606

研究成果の概要（和文）：

岩澤理論の関数体類似や変形の設定への一般化に対してのいくつかの成果を得た。特に、ヒルベルトモジュラー形式の肥田変形からくる状況では、代数的な側面においてはセルマー群の振る舞いを記述するコントロール定理を示し、解析的な側面では、多変数の  $p$  進  $L$  関数を構成した。また、ジーゲルモジュラー形式の肥田変形における局所的な岩澤理論、オイラー系の一般論を変形環が特異点を持つ場合に一般化する可換環論的研究でも大きな進歩が得られた。

研究成果の概要（英文）：

We obtained several results on generalized Iwasawa theory especially on the function-field analogue of Iwasawa theory studying abelian varieties over global fields of positive characteristic and the deformation-theoretic generalization of Iwasawa theory. For the algebraic side of Iwasawa theory, we proved the control theorem to study the behavior of Selmer groups on Hida deformations of Hilbert modular forms. For the analytic side of the theory, we constructed the  $p$ -adic  $L$ -functions in several variables on Hida deformations of Hilbert modular forms. We also worked on the Hida deformations of Siegel modular forms. We constructed the Coleman—Perrin-Riou map which interpolates dual exponential maps on the deformation. We also generalized our result on Euler system for deformation spaces removing the assumption that the deformation ring is regular.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュラーシンボル,  $p$  進  $L$  関数, 肥田理論, 岩澤理論, ヒルベルトモジュラー形

式, ジーゲルモジュラー形式, セルマー群, オイラー系

## 1. 研究開始当初の背景

岩澤理論は岩澤健吉氏が 1950 年代後半からの研究で円分体のイデアル類群の研究において画期的な理論を創始して以後, 楕円曲線やモジュラー形式などのより一般のガロア表現に対する岩澤理論として一般化されてきた. 特に, Wiles や肥田の研究以後ガロア変形という新しい要素が加わった. 岩澤理論的な考え方が整数論の研究にもたらす恩恵は計り知れず, これらの新しい要素を取り入れたより一層の理論の一般化が期待されていた.

## 2. 研究の目的

「ガロア変形的な視点での岩澤理論の一般化」という長期計画に取り組んでいる. 10 年近い研究を通してこういった一般化された岩澤理論で現れる新しい現象や問題点を理解し, 前より正確に予想としての枠組みを考察できるようになった. 例えば, あまり難しさや重要性が意識されていないが一般に認識されている以上にモチーフの周期というものがこういった岩澤理論の一般化には重要である現象を深く認識できた. 定式化がかたまりつつある一般化された岩澤理論についての課題はまだ主予想が成り立つ具体例がひとつしかなくもっと多くの成立例を確立させることも当面の目標である.

## 3. 研究の方法

楕円モジュラーを超えた一般化の理論の定式化を確立するために, 特にヒルベルトモジュラーな肥田変形とジーゲルモジュラーな肥田変形という最も手近で重要なガロア変形の具体例に的を絞り, 以前に楕円モジュラーな肥田変形の場合で得た様々な一般化された変形の岩澤理論の結果をこれらの場合に拡張することを試みる. その過程で, 可能な場合は, それらに限らない一般的な理論や予想の定式化を得たい.

## 4. 研究成果

ヒルベルトモジュラー形式の肥田変形から

くる状況においては, 代数的な側面においてはセルマー群の振る舞いを記述するコントロール定理を示した. 研究代表者が 10 年ほど前に楕円モジュラー形式の肥田変形において示した結果の一般化であるが, 変数の数が増える難しさヒルベルトモジュラーな肥田理論の技術的な難しさを克服し結果を得た (Fouquet 氏との共同研究). 解析的な側面では, 多変数の  $p$  進  $L$  関数を構成した. やはりヒルベルトモジュラーの肥田変形の複雑な形状や単数群の作用の問題, モジュラーシンボルを高次元で扱うことなどが大変である. 予想されるベストの  $p$  進  $L$  関数ではないが, はじめてヒルベルトモジュラーの肥田変形全体で  $p$  進  $L$  関数を構成した. また, ジーゲルモジュラー形式の肥田変形においてはオイラー系から  $p$  進  $L$  関数を作る枠組みである Coleman 写像の理論を確立した (Lemma 氏との共同研究). また, 特異点をもつ混標数の可換環において Bertini 型の定理を確立し, その応用としてオイラー系の一般論を変形環が特異点を持つ場合に一般化した. (下元氏との共同研究)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Tadashi Ochiai, Iwasawa theory for nearly ordinary Hida deformations of Hilbert modular forms, Algebraic Number Theory and Related Topics, 査読あり, 14巻, 2010, 11-18.

② Tadashi Ochiai, Yoshitaka Hachimori, Notes on Non-commutative Iwasawa Theory, The Asian Journal of Mathematics, 査読あり, 14巻, 2010, 301-319.

③ Tadashi Ochiai, Faien Trihan, On the Selmer groups of abelian varieties over function fields of characteristic  $p$ , Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読あり,

143巻, 2009, 23-43.

④ Tadashi Ochiai, The algebraic  $p$ -adic  $L$ -function and isogeny between families of Galois representations, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読あり, 212巻, 2008, 1381--1393,

[学会発表] (計 14 件)

① 落合理, Coleman map for nearly ordinary Hida deformations, East Asia Number Theory Seminar, 2012年1月16日, (National Taiwan University/台湾)

② 落合理, Coleman map for Hida deformations of  $\mathrm{GSp}(4)$ , 沖縄数論幾何研究集会, 2011年10月12日, (沖縄尚学高校/沖縄県).

③ 落合理, Iwasawa theory for Hida deformations of  $\mathrm{GL}_2$ , 数論セミナー, 2011年3月11日, (Istanbul Center for Mathematical Sciences/トルコ).

④ 落合理, ヒルベルトモジュラー多様体のモジュラーシンボルと肥田理論, 数論幾何セミナー, 2010年12月20日, (名古屋大学)

⑤ 落合理, Towards construction of Iwasawa theory over Galois deformation spaces, 研究集会`Iwasawa 2010`, 2010年7月9日, (トロント大学/カナダ).

⑥ 落合理, 岩澤理論に現れる可換環論の問題たちについての注意, 研究集会`Lefschetz fibration and category theory` (6/4-6/6), 2010年6月5日, (大阪大学)

⑦ 落合理,  $p$ -adic  $L$ -functions over Galois deformation spaces, 研究集会`Korea-Japan Number Theory conference`, 201

0年1月21日, (Seoul National University/韓国)

⑧ 落合理, 岩澤理論における  $p$  進  $L$  関数と周期積分, 談話会, 2009年4月27日 (東京理科大学)

⑨ 落合理, On conjectural framework for generalized Iwasawa theory, 岩澤理論ミニ勉強会, 2009年4月2日, (京都大学理学部)

⑩ 落合理, Iwasawa Theory for Hilbert modular Hida deformation, 数論セミナー, 2009年3月23日, (メリーランド大学/アメリカ)

⑪ 落合理, 総実体の肥田変形に関する岩澤理論, 研究集会`代数的整数論とその周辺`, 2008年12月12日, (京都大学数理解析研究所)

⑫ 落合理,  $\mathrm{GL}(2)$  の肥田変形に関するセルマー群と  $p$  進  $L$  関数, 九州大学代数セミナー, 2008年11月21日, (九州大学)

⑬ 落合理, 岩澤理論の一般化について, 日本数学会秋季総合分科会特別講演, 2008年9月27日, (東京工業大学)

⑭ 落合理,  $\mathrm{GL}_2$  の肥田変形に対する多変数  $p$ -進  $L$  関数のヒルベルトモジュラーへの一般化, 東北大学代数セミナー, 2008年6月26日, (東北大学)

[その他]  
ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

落合理 ( OCHIAI TADASHI )

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号 : 90372606