様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年６月９日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008～2011
課題番号：２０７４００１４
研究課題名（和文）　射影空間内の超曲面と直線の代数幾何とホッジ構造

研究課題名（英文）　Algebraic geometry of hypersurfaces and lines in projective spaces and Hodge structure

研究代表者
池田　京司　（IKEDA ATUSHI）
東京電機大学・工学部・准教授
研究者番号：４０３９７６１７

研究成果の概要（和文）：射影空間内の超曲面に対し、その超曲面とある重複度で交わる直線全体の集合がなす代数多様体のホッジ構造により、もとの超曲面の幾何的な性質を記述する研究を行った。とくに３次曲面に含まれる直線の幾何的な性質と、直線の多様体のネロン‐セヴェリ格子の関係を明らかにし、このネロン‐セヴェリ格子の構造を計算した。さらにモジュライ空間上の３次曲面の族から、直線の多様体のホッジ構造を用いて定まる周期写像の単射性を示した。

研究成果の概要（英文）：We described geometric property of a hypersurface in a projective space by using the Hodge structure of the variety of lines which intersect the hypersurface with some multiplicity. We explained the relation between geometric property of lines in cubic surface and the Neron-Severi lattice of the variety of lines, and we computed the structure of the Neron-Severi lattice. And we showed the injectivity of the period map which is defined by the Hodge structure of variety of lines form the family of cubic surfaces over the moduli space.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	700,000	210,000	910,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何、ホッジ構造、３次曲面

１．研究開始当初の背景

射影空間Ｐ内の超曲面Ｘに対し、Ｐ内の直線全体の集合がなすグラスマン多様体の中で、Ｘに含まれる直線がなす部分代数多様体Ｓは、Ｘ内の直線のファノ多様体と呼ばれ、古くから研究されてきた。特に４次元射影空間内の３次超曲面に対するファノ多様体Ｓは代数曲面となり、１９７０年代の Clemens と Griffiths の研究において、Ｘの非有理性の証明や、トレリ型の定理の証明に応用されていた。彼らの研究では、ファノ多様体Ｓのホッジ構造を調べることにより、超曲面Ｘの幾何

的な性質を理解することに成功していた。一方、高次元高次数の超曲面に対する直線のファノ多様体については、Barth と Van de Ven の研究により、その非特異性や連結性に関する基礎的な研究が整備されていた。しかし、ファノ多様体Sのホッジ構造は高次元高次数の場合には複雑で、超曲面Xの幾何的な性質を記述する研究は実現されていなかった。

２．研究の目的

射影空間P内の超曲面Xに対し、P内の直線全体の集合がなすグラスマン多様体の中で、Xと重複度m以上の交点をもつ直線全体がなす部分多様体Yを新たに導入し、Yのホッジ構造を用いて、もとの超曲面Xの幾何的な性質を具体的に記述する研究を実現することが目的である。重複度mが小さい場合は、Yのホッジ構造は超曲面Xのホッジ構造と本質的に同じであり、mが大きい場合には、Yのホッジ構造はファノ多様体Sのホッジ構造と本質的に同じものとなる。特にm＝３の場合のYのホッジ構造は、超曲面Xのホッジ構造とは本質的に異なり、ファノ多様体Sのホッジ構造ほどは複雑すぎないため、Xの幾何的性質と結びつく様々な応用が期待できる。したがって、m＝３の場合のYのホッジ構造やそれに付随する周期写像を、特に詳しく解明することが目的である。

３．研究の方法

（１）射影空間内の超曲面Xの直線のファノ多様体における Berth と Van de Ven の研究にならって、Xと重複度m以上の交点をもつ直線全体がなす代数多様体Yについて、モジュライの中で一般の超曲面に対し、Yが非特異な代数多様体になるための条件をXの次元と次数と重複度mにより記述する。さらにYが連結になるための条件をXの次元と次数と重複度mにより記述する。

（２）射影空間内の超曲面X自身のホッジ構造の無限小変形を具体的に計算するための道具として、ヤコビ環と呼ばれる次数付き環によるホッジ分解の表示が、Griffiths により知られている。これにならって、重複度m以上の交点をもつ直線の多様体Yのホッジ構造の無限小変形を記述するための次数付き環を導入し、実際にYのホッジ分解を表示できることを示す。

（３）重複度m＝３として定まる直線の多様体Yについて、そのホッジ構造と超曲面Xの幾何学的性質の関係を明らかにする。特にXが３次曲面の場合には、Yは代数曲面となるが、この代数曲面内の有理曲線とXに含まれる直線の関係を明らかにし、Yのネロン−セヴェリ格子の構造を計算する。また３次曲面のモジュライ空間からYのホッジ構造を用いて定義される周期写像の挙動を詳しく調べ、トレリ型の問題を解決する。さらには周期写像の逆写像を、保形関数を用いて具体的に表示する。

４．研究成果

（１）Xをn次元射影空間P内のd次超曲面とする。Xの点とP内の直線の組で、その直線がその点においてXと重複度m以上で交わるもの全体がなす代数多様体をYとする。この代数多様体Yについて、以下の基本的結果を示した。0<m<d+1 とするとき、

① m>2n-1 ならば、一般のXに対し、Yは空である。

② m<2n ならば、すべてのXに対し、Yは空でない。

③ m<2n ならば、一般のXに対し、Yは2n-m-1 次元で非特異である。

④ m<2n-1 ならば、すべてのXに対し、Yは連結な代数多様体となる。

さらにd=3の場合には、Xが非特異であることと、Yが非特異であることが同値であることを示した。

この結果は超曲面に対する直線のファノ多様体Sに対しする Barth と Van de Ven の研究 の類似であり、Yのホッジ構造を調べるときの基礎となった。

（２）Yのホッジ構造の無限小変形を記述するためのヤコビ環を、双次数付き環としてXの定義方程式の高階微分を用いて構成し、ある条件のもとで、ヤコビ環のある斉次部分がYのホッジ分解に対応することを証明した。特にm＝３で３次曲面の場合には、Yのホッジ構造の無限小変形が完全に記述できるようになり、実際に後の研究において利用することが可能になった。

（３）重複度m＝３として定まる直線の多様体Yを３重接線の多様体と呼ぶ。そのホッジ構造について、様々な結果を得ることができた。

① 非特異３次曲面Xに対し、Allcock-Carlson-Toledo はXで分岐する３次元射影空間の３次ガロア被覆Vの３次コホモロジー群に定まるホッジ構造H(V)を用いて、３次曲面のモジュライ空間を研究していた。一方で３重接線の多様体Yの２次コホモロジー群に定まるホッジ構造H(Y)を用いて、Xの幾何的な

性質を調べることが我々の目的であった。これらの異なる代数多様体を用いて定義されるホッジ構造の間の関係を調べた。実際にホッジ構造H(V)の２次外積のガロア群の作用で不変な部分が、ホッジ構造H(Y)と同型になることを示した。H(V)はあるアーベル多様体のホッジ構造と同型であるため、この結果により３重接線の多様体Yのホッジ構造がより詳しく調べられるようになった。

② ①の結果をさらに高次元化した。３次元非特異３次超曲面Xに対し、Xで分岐する４次元射影空間の３次ガロア被覆Vの４次コホモロジー群に定まるホッジ構造をH(V)とし、Xに対する３重接線の多様体Yの４次コホモロジー群に定まるホッジ構造をH(Y)とする。このときH(V)の２次対称積のガロア群の作用で不変な部分が、ホッジ構造H(Y)と同型となることを示した。H(V)はあるシンプレクティック多様体のホッジ構造と同型であるため、この結果により３重接線の多様体Yのホッジ構造がより詳しく調べられるようになった。

③ ①の結果を用いることにより、モジュライ空間上の３次曲面の族から、３重接線の多様体Yのホッジ構造を用いて定まる周期写像の単射性を示した。したがって、非特異３次曲面Xに付随するYのホッジ構造により、３次曲面Xの同型類が決まることが分かった。これはYのHodge構造がXの幾何学的情報を十分に持っていることを意味しており、期待すべき結果が得られたことになっている。より具体的にXの幾何的性質を３重接線の多様体Yのホッジ構造により記述する結果を得るための基礎となった。

④ 非特異３次曲面X上の点はその点を通るX内の直線が３本あるときのEckardt点と呼ばれる。非特異３次曲面のEckardt点のような幾何的な性質が、３重接線の多様体Yの特別な代数曲線に対応し、それを通してYのホッジ構造に反映される様子を解明した。Xが３次曲面の場合、３重接線の多様体Yは代数曲面である。Eckardt点は代数曲面Yの中で自己交点数が(-2)の有理曲線と１対１に対応することが分かった。またXに含まれる27本の直線はそれぞれYの中で自己交点数が(-3)の２つの有理曲線に対応することが分かった。これらにより、いくつかの具体的３次曲面について、代数曲面Yのネロン-セヴェリ格子の構造を決定することができた。Xがモジュライ空間上の生成的３次曲面であるとき、Yのネロン-セヴェリ格子は階数28判別式-5・3^14の格子となる。またXがFermat型の３次曲面のとき、Yのネロン-セヴェリ格子は階数44判別式-3^12の格子となる。
高次元３次超曲面のEckardt点についても、３重接線の多様体Yの中間次元の特別な代数的サイクルと対応しており、これらの代数的サイクルに対する交点数を計算した。

⑤ 特異点として高々通常２重点のみをもつ３次曲面Xについて、３重接線の多様体の非特異極小モデルYのホッジ構造を研究した。Xの通常２重点の個数は高々４個である。Xの通常２重点が４個の場合、Yは有理曲面となる。
Xの通常２重点が３個の場合、YはK3曲面ととなり、３次巡回群が作用するある種数２の代数曲線のヤコビ多様体のその巡回群の作用による商と双有理同値になることを示した。これによりＹのホッジ構造の計算を種数２の代数曲線の上の周期積分に帰着させ、周期写像を具体的に調べることが出来た。Ｙのネロン-セヴェリ群の階数は１９または２０であるが、どちらになるかを周期の値によって判定する方法を与えた。そして３個の通常２重点をもつ３次曲面をより悪い特異点をもつ代数曲面に退化させたときのこのホッジ構造に対するモノドロミー作用を計算し、古典的な楕円曲線と上半平面上の保型形式の理論の類似として、３個の通常２重点をもつ３次曲面に対する周期写像の逆写像をホッジ構造の分類空間の上の保型関数を用いて具体的に記述する結果が得られた。この計算がモジュライ空間の次元がより高い場合の周期写像の研究の手がかりになることが期待される。
Xの通常２重点が２個の場合、Yは標準写像により楕円曲面になる。この楕円曲面の退化ファイバーを調べ、そのModell-Weil格子の構造を計算した。
Xの通常２重点の個数が１個以下の場合、３重接線の多様体Yが一般型の代数曲面になることを示した。通

常２重点の個数が１個の場合、標準写像は射影平面への２重被覆を与え、通常２重点の個数が０個の場合、標準写像はもとの３次曲面Ｘへの２重被覆を与え、分岐因子はヘッシアンの零点と一致することを示した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 池田京司, The double cover of cubic surfaces branched along their Hessian, arXiv mathematics, 査読無, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1012/1012.4242v1.pdf
② 池田京司, The varieties of tangent lines to hypersurfacese in projective spaces, arXiv mathematics, 査読無, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1012/1012.2186v1.pdf
③ 池田京司, The varieties of intersections of lines and hypersurfaces in projective spaces, ``Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles'' RIMS Kokyuroku Bessatsu, B9, 115-125, 2008, 査読有, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B9/pdf/B9-05.pdf

〔学会発表〕（計７件）

① 池田京司, ３次超曲面の幾何とホッジ構造, 代数学シンポジウム, ２０１１年８月１０日, 岡山大学環境理工学部.
② 池田京司, ３次超曲面の Eckardt 点について,射影多様体の幾何とその周辺2010, ２０１０年１１月６日,高知大学理学部.
③ 池田京司, Nodal cubic surfaces and Eisenstein series, 特異点と多様体の幾何学, ２０１０年９月１８日, 山形大学理学部.
④ 池田京司, Nodal cubic surfaces and Eisenstein series, 代数幾何の関連する諸分野, ２０１０年８月３０日, 北海道大学理学部.
⑤ 池田京司, Nodal cubic surfaces and generalized Kummer surfaces, 複素幾何と代数幾何の若手研究集会, ２０１０年２月１９日, 熊本大学理学部.
⑥ 池田京司, A period map for cubic surfaces, Hodge 理論と代数幾何学, ２００９年６月２９日, 京都大学数理解析研究所.
⑦ 池田京司, Periods and geometry of cubic forms, Geometry of singularities and manifolds, ２００８年９月１３日, 草津セミナーハウス.

６．研究組織
(1)研究代表者
池田　京司（IKEDA ATSUSHI）
東京電機大学・工学部・准教授
研究者番号：４０３９７６１７