

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月28日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740018

研究課題名（和文） 放物型概均質ベクトル空間とそのゼータ関数の整数論

研究課題名（英文） Number theory for parabolic type prehomogeneous vector spaces and their associated zeta functions

研究代表者

谷口 隆（TANIGUCHI TAKASHI）

神戸大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：60422391

研究成果の概要（和文）：

- (1) 2元3次形式の空間の整型を分類し、付随するゼータ関数が全て、双対恒等式を持つことを示した。（大野泰生氏・若槻聡氏との共同研究）
- (2) 3次体を数える関数の第二主要項を決定し、Robertsの予想を解決した。さらに軌道L関数の概念を導入し用いて、算術級数中での3次体の判別式の分布に、偏りが現れることを示した。（Frank Thorne氏との共同研究）
- (3) 進行中の研究において、ある可約な10次元の概均質ベクトル空間について、整軌道の数論的意味づけを与えた。またその2変数のゼータ関数が2元3次形式の空間の、レベル付ゼータ関数の族で表示されることを見出している。（Gautam Chinta氏との共同研究）

研究成果の概要（英文）：

- (1) I classified the integral models for the space of binary cubic forms, and proved that the associated zeta functions all satisfy the dual identities (joint work with Y. Ohno and S. Wakatsuki).
- (2) I determined the second main for counting cubic fields and therefore solved the Roberts' conjecture. Moreover, by introducing the notion of orbital L functions, I showed that there are biases for counting cubic fields in arithmetic progressions (joint work with F. Thorne).
- (3) In an ongoing work, I am studying one particular reducible prehomogeneous vector space of ten dimensional. I gave an algebraic interpretation of integer orbits, and also find that the associated zeta function in two variables are expressed in terms of a family of zeta functions for the space of binary cubic forms with level structures (joint work with G. Chinta).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論，密度定理，ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

1960年代の佐藤幹夫氏と新谷卓郎氏の研究によって、概均質ベクトル空間にはゼータ関数が付随することが見出され、整数論への応用が期待されていた。概均質ベクトル空間の中でも、放物型と呼ばれるクラスは構造が豊富で、他分野との関連からも重要である。このクラスの整数論における重要性は、先駆的な Wright-Yukie 理論(1992)や大野-中川による双対恒等式(1998)を経て、Bhargava の高次合成則の理論(2004-2008)により決定的に明らかになっていった(この業績により Bhargava は全米数学会 Cole 賞を受賞)。特に3次体の族を体系的に扱う方法は、現在のところ概均質ベクトル空間による定式化がもっとも有効であると考えられており、新谷卓郎氏の研究(1972, 1975)や Datskovsky と Wright の研究(1985-1988)をさらに発展させることは興味深い問題と考えられている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、放物型概均質ベクトル空間のゼータ関数について詳細に考察し、密度定理や保型形式論をはじめとする整数論へのさまざまな応用を与えることにある。特に3次体の族と関係する概均質ベクトル空間は重点的な研究対象とする。また、概均質ベクトル空間の理論を雛形として、余正則空間などの一般化された空間での整数論・ゼータ関数論の発展も志向する。

3. 研究の方法

既存の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論をさらに発展させつつ、代数的整数論や解析的整数論の重要な手法を概均質ベク

トル空間の理論に適用する。代数的な側面からは、概均質ベクトル空間の整軌道に着目し、Bhargava の高次合成則を参考にしながら、重点的に考察する。解析的な側面からは、指数和の評価や平方自由篩といった解析的整数論の重要な手法を適用する。

このような複数の分野にまたがる研究を有機的に進めるため、関連分野で世界レベルで活発な研究活動を行っている若手研究者との連携を大切にする。海外渡航を行って研究打ち合わせ・情報収集・成果発表を行うほか、必要に応じて海外から研究者を招聘したり国際研究集会を開催したりして、活発な研究討論を行う。

4. 研究成果

3次体の族と対応する概均質ベクトル空間、特に2元3次形式の空間のゼータ関数の研究で重要だと考えられる成果を複数得た。

(1) 大野泰生氏・若槻聡氏との共同研究で、2元3次形式の空間の整型を分類し、全部で10種類あることを示した。そして、付随するゼータ関数が全て「大野-中川の大対恒等式」と同様の双対恒等式をみたすことを示した。双対恒等式の証明は、もともとの大野-中川のケースに帰着することでなされる。研究成果は2編の論文(雑誌論文の②⑤)にまとめた。

(2) Frank Thorne 氏との共同研究で、3次体の判別式を数える関数について第二主要項を決定して Roberts 予想を解決した。さらに軌道 L 関数の概念を導入し、その解析的性質を用いて、算術級数中の3次体の判別式の分布に偏りが現れることを証明した。例えば判別式が X 以下で $a \pmod{7}$ となる3次体の個数の式は、 a

ごとに異なるものになる。分布に偏りが出ると予想される整数論的対象はいくつか知られているが、実際にその偏りが証明されるのは比較的珍しいことである。

これは軌道L関数の $s=5/6$ における極が、3次指標で捻った場合には消えないことの帰結として解析的には説明される。しかし代数的には依然として謎めいた結果であり、解釈が待たれている。これは整数論の幅広い分野の研究者から興味をもたれる結果となった。研究成果は2編の論文(雑誌論文の③④)にまとめた。

- (3) Gautam Chinta 氏との進行中の共同研究で、ある可約な10次元の概均質ベクトル空間について考察した。特に整軌道が、3次環とその巡回イデアルの対を付加構造つきで分類していることを見出した。また、この空間に付随する2変数のゼータ関数が、2元3次形式の空間の、レベル付ゼータ関数の族で表示されることを見出し、解析接続や留数公式を部分的に証明している。現在も研究を継続している。

この他部分的な成果のあがっている進行中の成果に、(A) 6次ガロア拡大の判別式の密度定理 (Frank Thorne 氏との共同研究)、(B) 相対3次拡大の判別式の密度定理 (Frank Thorne 氏, Manjul Bhargava 氏との共同研究)、(C) 楕円曲線の2-Selmer 群の平均値 (Arul Shankar 氏との共同研究)があり、研究を継続している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Takashi Taniguchi, An Introduction to

higher composition laws (in Japanese), 数理解析研究所講究録, B25, 2011, 211-254.

- ② Yasuo Ohno, Takashi Taniguchi and Satoshi Wakatsuki, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, Amer. J. Math. 131-6(2009), 1525-1541.

[学会発表] (計10件) (総計25件)

*以下は主要なもの

- ① Takashi Taniguchi, A second main term for counting cubic fields, and biases in arithmetic progressions, プリンストン大学-高等研究所 整数論セミナー, 米国, 高等研究所, 2011年12月.
- ② Takashi Taniguchi, Secondary terms in counting functions for cubic fields, 研究集会『Explicit methods in number theory』, ドイツ, オーベルヴォルバッハ数学研究所, 2011年7月.
- ③ Takashi Taniguchi, The secondary term in the counting function of cubic field discriminants, and their distributions in arithmetic progressions, ニューヨーク市立大学合同整数論セミナー, 米国, 2010年12月.
- ④ Takashi Taniguchi, The secondary term in the counting function of cubic field discriminants, and their distributions in arithmetic progressions, スタンフォード大学-アメリカ数学研究所 整数論セミナー, スタンフォード大学, 米国, 2010年10月.
- ⑤ Takashi Taniguchi, Orbital L-functions for the space of binary

cubic forms, 研究集会『Second international workshop on zeta functions in algebra and geometry』, スペイン, マヨルカ島, 2010年5月.

- ⑥ 谷口隆, 2元3次形式の空間に付随するゼータ関数の代数的関数等式, 第54回代数学シンポジウム, 明治大学, 2009年8月.
- ⑦ Takashi Taniguchi, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, 研究集会『Higher Degree Forms Conference』, フロリダ大学, 米国, 2009年5月.
- ⑧ Takashi Taniguchi, Extra functional equations of zeta functions of binary cubic forms, 研究集会『Automorphic representations, automorphic L-functions and arithmetic』, 京都大学数理解析研究所, 2009年1月.
- ⑨ Takashi Taniguchi, Exceptional groups and Sato-Shintani's zeta functions, 研究集会『Workshop on Shimura Varieties, Automorphic Representations and Related Topics』, 京都大学, 2008年11月.
- ⑩ Takashi Taniguchi, Extra functional equations of zeta functions of binary cubic forms, 研究集会『Explicit Structures in Modular Forms and Number Theory』, 近畿大学, 2008年8月.

[その他]

研究代表者のウェブサイト:

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~tani/>

国際研究集会を2度開催した.

[I] Kobe Number Theory Workshop,

2010年1月13日~15日, 神戸大学.

ウェブサイト:

www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/tani/workshop1001kobe/index.html

[II] Ehime Number Theory Workshop,

2009年2月17日~20日, 愛媛大学.

ウェブサイト:

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/tani/workshop0902ehime/index.html>

活発な研究を行っている若手研究者を講演者として招待し, 成果発表を行うと共にさまざまな研究討論・意見交換を行った.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷口 隆 (TANIGUCHI TAKASHI)

神戸大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号: 60422391

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし