様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１３日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０７４００１９
研究課題名（和文）　正標数の手法を用いた随伴イデアル層の研究

研究課題名（英文）　A study on adjoint ideal sheaves by characteristic p methods

研究代表者
高木　俊輔（TAKAGI SHUNSUKE）
九州大学・大学院数理学研究院・特任准教授
研究者番号：４０３８０６７０

研究成果の概要(和文)：
乗数イデアル層の類似もしくは亜種として，随伴イデアル層や maximal non-lc ideal sheaf などのイデアル層を導入し，制限定理等の局所的性質を密着閉包やフロベニウス分裂などの正標数の手法を用いて調べた．また，乗数イデアル層の正標数における対応物である判定イデアルに付随する，正標数の特異点の不変量(F 跳躍数，parameter F-jumping number，F-threshold，non-F-pure ideal)の性質を体系的に調べた．

研究成果の概要(英文)：
We introduced the notions of adjoint ideal sheaves and maximal non-lc ideal sheaves as analogs or variants of multiplier ideal sheaves, and then we studied their local properties by characteristic p methods such as tight closure and Frobenius splitting. Also, we carried out a systematic study of invariants (F-jumping numbers, parameter F-jumping number, F-thresholds and non-F-pure ideals) related to test ideals, which can be viewed as a positive characteristic analog of multiplier ideal sheaves.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何，可換環論，特異点論

1. 研究開始当初の背景

1990 年代以降，乗数イデアル層の理論は代数幾何学において重要な役割を果たすようになった．乗数イデアル層は当初，Demailly, Nadel, Siu 等によって，解析的に定式化された．その後ほどなくして，埋込み特異点解消とその食い違い因子を用いて，純代数幾何的に再定式化された．この代数的乗数イデアル層は可換環論・代数幾何学に様々な応用を持つ．さらに近年，乗数イデアル層の亜種である(一般化とも言え

る）随伴イデアル層が登場するようになった．随伴イデアル層の基本的なアイディアは Shokurov によって提示されていたが，明示的に用いたのは Ein-Lazarsfel が最初である．彼等は随伴イデアル層を用いて，アーベル多様体の Theta 因子の特異点について調べた．また川北は随伴イデアル層を用いて，対数的端末特異点に関する逆同伴を示した．さらに Hacon-McKernan は随伴イデアル層を用いて，川又，中山による多重標準因子の多重標準因子の延長定理を境界付きの場合に拡張した．これらの随伴イデアル層は，いくつか変種があるものの，全て因子に付随するイデアル層である．そこで，既存の随伴イデアル層の一般化として，余次元が 1 とは限らない閉部分多様体に付随する随伴イデアル層を導入したい．これが本研究課題の申請時の動機であった．

2．研究の目的

本研究課題の申請時の目的は，余次元が1とは限らない閉部分多様体に付随する随伴イデアル層の概念を導入し，このイデアル層の性質を，密着閉包と呼ばれる正標数の可換環論を使って，体系的に調べることであった．
より具体的には，閉部分多様体をブローアップして因子の場合に帰着することによって，閉部分多様体に付随する随伴イデアル層を定義し，この随伴イデアル層の次の性質を調べることを目標とした．

(1) 随伴イデアル層の制限予想

Aを非特異代数多様体，Xをその閉部分代数多様体としたとき，対(A,X)の随伴イデアル層の X への制限と X の乗数イデアル層が一致する，というのが制限予想の主張である．X が余次元 1（すなわち因子）の場合には，川又-Viehweg の消滅定理から，この予想が従う．しかし余次元が 2 以上の場合にはこの議論は全く機能しない．それに対し，密着閉包の理論においては(A,X)の特異点と X の特異点を比べることは比較的容易である．そこで，密着閉包の理論を用いて，余次元が 2 以上の場合の制限予想を肯定的に解決することを目標とした．

(2) 随伴イデアル層を用いたコホモロジーの消滅定理

乗数イデアル層を用いることによって，小平の消滅定理の一般化である，Nadel の消滅定理を定式化することができる．そこで，随伴イデアル層を用いて，類似の消滅定理が成り立つか考察することにした．

3．研究の方法

密着閉包の理論を用いて，随伴イデアル層などの代数幾何学的対象の局所的性質を調べた．
密着閉包とは正標数の可換環におけるイデアルの閉包操作で，1980 年代後半に Hochster-Huneke によって，正標数特有の写像であるフロベニウス写像を用いて定式化された．
そして密着閉包の理論において中心的な役割を担うのが，判定イデアルと呼ばれるイデアルである．原-吉田及び私は判定イデアルを境界付きの場合に拡張し，標数 p への還元というテクニックを介することによって，それが乗数イデアル層と対応することを証明した．さらに私は，「境界付き」判定イデアルの一般化として因子的判定イデアルというイデアルを導入し，これが因子に付随する随伴イデアル層と対応することを証明した．本研究では，因子的判定イデアルの概念をさらに一般化して，イデアルに付随する「因子的」判定イデアルという概念を導入した．そしてこのイデアルが閉部分多様体に付随する随伴イデアル層と対応することを部分的に証明した．この部分的対応を用い，イデアルに付随する「因子的」判定イデアルの性質を調べることによって，随伴イデアル層の性質を調べた．
また判定イデアルに付随する正標数の不変量についても，密着閉包の理論を用いて，その性質を調べた．
随伴イデアル層については Robert Lazarsfeld 氏，Mircea Mustata 氏，高山茂晴氏等と，判定イデアルについては渡辺敬一氏，吉田健一氏等と適期意見交換を行った．

4．研究成果

(1)随伴イデアル層の制限定理

A を滑らかな代数多様，X を A の Q-Gorenstein 正規部分多様体とする．このとき対(A,X)に付随する随伴イデアル層の概念を導入した．これは既存の随伴イデアル層（X が因子の場合）の自然な拡張になっており，類似の性質を満たすことを確認した．特にXが Gorenstein の場合に制限定理を証明した．すなわち，D を X の局所完全交叉欠陥イデアル層とすると，

(A,X)の随伴イデアル層のXへの制限が(X,D)の乗数イデアル層と一致することを示した. 証明は, 随伴イデアル層と「因子的」判定イデアルの対応を用いて, 正標数の可換環の問題へと帰着する. XがGorensteinの場合, 局所完全交叉欠陥イデアル層 D は, X の定義イデアル層 I と direct linked なイデアル層の和に一致するため, I の極小自由分解の言葉で記述可能である. I の極小自由分解と I のフロベニウス冪の極小自由分解を比較することにより, (X,D)の判定イデアルに関する情報が得られる. この証明は X の Gorenstein 性に依存しているため, 一般の場合を証明するには全く別のアイディアが必要になる.
以上の研究成果を〔雑誌論文〕の 1.にまとめた.

(2)F 跳躍数の性質
正標数の特異点の不変量である, F 跳躍数の性質を調べた. 特にその離散性・有理性について研究した. Blickle, Mustata, Smith は全空間が非特異の場合に F 跳躍数の離散性・有理性を証明した。私は Manuel Blickle, Karl Schwede, Wenliang Zhang との共同研究において, 彼らの結果を全空間が Q-Gorenstein 正規代数多様体の場合に拡張した. この結果を〔雑誌論文〕の 2.にまとめた.

(3)F-threshold の性質
イデアル J に関するイデアル I の F-threshold とは, I の通常冪と J のフロベニウス冪を比較することによって得られる, 正標数の特異点の不変量である. Craig Huneke, 渡辺敬一との共同研究において, F-threshold に関する次の３つの結果を得た.
① R が標数 p>0 の次数環で I,J を R の斉次巴系イデアルとする. このとき, J に関する I の F-threshold を用いて, I, J の重複度の比較公式を証明した. 証明は, R の次数プラス閉包は R のビッグ CM 加群になるという Hochster-Huneke の定理を用いて, R が Cohen-Macaulay 環の場合に帰着する.
② 標数 p>0 の局所環 R が正則ならば, 任意のイデアル I, J に対して, J に関する I の F-threshold と Jω に関する Iω の F 跳躍数は一致する. その一方で Spec R が特異点を持つならば, 一般に両者は一致しない. 本研究では, J が巴系イデアルで SpecR-V(I)が F 有理的ならば, 両者が一致することを証明した.
③ 乗数部分加群の跳躍数は, 正標数への還元を介して, F 跳躍数と対応している. この事実を利用して, ①の公式の系として, R が標数 0 の体上有限生成な正規次数整域で I,J が R の斉次巴系イデアルのとき, Jω に関する Iω の跳躍数の下限を I,J の重複度を用いて与えた.
以上の研究成果を〔雑誌論文〕の 3.にまとめた.
(4)maximal non-lc ideal の制限定理
極小モデル理論の観点から藤野修は, non-lc ideal と呼ばれる, 非対数的標準特異点集合を定めるイデアル層を導入した. このイデアル層は制限定理などの良い性質を満たす一方で, 乗数イデアル層の類似として期待される幾つかの性質を満たさないことも知られている. そこで藤野修・Karl Schwede との共同研究において, 乗数イデアル層の「極限」をとることによって, 非対数的標準特異点集合を定める別のイデアル層を定義した. このイデアル層は, 非対数的標準特異点集合を定めるイデアル層の中で「最大」のものになるため, maximal non-lc ideal と呼ぶことにした. 本研究では, maximal non-lc ideal が小平型の消滅定理, Bertini 型の定理などの基本的性質を満たすことを確認し, 局所完全交叉の場合に maximal non-lc ideal の制限定理を証明した. また maximal non-lc ideal の正標数における対応物として, non-F-pure ideal と呼ばれる正標数の環上のイデアルを導入し, 単項式イデアルに付随する non-F-pure ideal の組み合せ論的特徴付けなど, 幾つかの基本的性質を確認した. さらには, 局所完全交叉とは限らない正規環に対して, non-F-pure ideal の制限定理を証明した. このことから, maximal non-lc ideal の制限定理も, 局所完全交叉とは限らない正規多様体に対して成り立つことが期待される.
以上の研究成果を〔雑誌論文〕の 4.にまとめた.

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

①Osamu Fujino, Karl Schwede, Shunsuke Takagi, Supplements to non-lc ideal sheaves, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, In Press (2011).
②Craig Huneke, Shunsuke Takagi, Kei-ichi Watanabe, Multiplicity bounds in graded rings, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, 51 (2011), 127-147.

③Shunsuke Takagi, Adjoint ideals along closed subvarieties of higher codimension, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 査読有, 641 (2010), 145-162.
④Manuel Blickle, Karl Schwede, Shunsuke Takagi, Wenliang Zhang, Discreteness and rationality of F-jumping numbers on singular varieties, 査読有, 347 (2010), 917-949.

〔学会発表〕(計 3 件)
①Shunsuke Takagi, Introduction to F-singularities, Algebraic Geometry Seminar, 2010 年 6 月 14 日, POSTECH.
②Shunsuke Takagi, Multiplicities and jumping numbers, Algebraic Geometry in Characteristic p and Related Topics, 2010 年 2 月 18 日, 東京大学大学院数理科学研究科
③Shunsuke Takagi, Log canonical thresholds of binomial ideals, 第 30 回可換環論シンポジウム, 2008 年 11 月 18 日, 虹ノ松原ホテル(唐津市)

〔その他〕
ホームページ等
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~stakagi/

6. 研究組織
(1)研究代表者
高木 俊輔 (TAKAGI SHUNSUKE)
九州大学・大学院数理学研究院・特任准教授
研究者番号:40380670