

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20740020

研究課題名（和文）カペリ型恒等式とリー環の普遍包絡環の研究

研究課題名（英文）Research on Capelli type identities and universal enveloping algebras of Lie algebras

研究代表者

伊藤 稔 (ITO MINORU)

鹿児島大学・理工学研究科（理学系）・准教授

研究者番号：60381141

研究分野：表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：テンソル代数、カペリ恒等式、dual pair、普遍包絡環、量子展開環

1. 研究計画の概要

本研究の目的はカペリ恒等式を手がかりに普遍包絡環、また dual pair などの無重複表現における精密な構造を明らかにすることである。リー環の普遍包絡環は表現論において非常に重要であるが、その具体的な構造については一般にはまだ十分明らかになっていない。しかし一般線型リー環の場合にはカペリ元（さらにそれを一般化した quantum immanant）という普遍包絡環の中心元が知られており、具体的な問題も満足のできるレベルで解決できる。本研究の目的はこれら一般線型リー環に関する精密な結果を他のリー環に拡張することである。

近年、古典リー環の場合の研究はかなり進んだが、まだ一般線型リー環以外の quantum immanant についてはほとんどわかっておらず、これが本研究の大きな目標ということになる。過去の研究で行列式は直交リー環と、パーマネントはシンプレクティックリー環と相性が良いという謎めいた現象が見られた（表現に関してもこのような相性の良さがある）。似たような奇妙な双対性はある種のシューア型関数にも見られる。これらの現象は最終的にはいろいろなリー環における quantum immanant の性質という形で解決されるべきである。現時点では Okounkov と Olshanski によって研究のきっかけが得られているだけで、その具体的な記述やそれに対応するカペリ型恒等式などはほとんど解明されていない。これを攻略するための効果的な武器として、テンソル代数と無限対称群を融合した代数が有効利用できるのではないかと考えている。

2. 研究の進捗状況

テンソル代数の拡張とその上の微分作用素に関する最近の研究が大きく進んだ。この代数はテンソル空間上の表現論・不変式論を調べる手段として役立つ。またこの代数におけるある種の母関数の形で、immanant という行列関数、そして一般線型リー環の普遍包絡環の中心の基底である quantum immanant を自然に扱うことができる。これら一連の成果を論文 “Extensions of the tensor algebra and their applications” としてまとめた。

さらにこの代数と微分作用素の q 類似を構成した。この枠組みは一般線型リー環上の量子展開環の表現を調べるのに利用できる。例えば、この量子展開環と Iwahori-Hecke 代数との双対性も簡潔に証明できる。

和地輝仁の発見したカペリ型恒等式に関する成果もある。通常のカペリ恒等式の背景に dual pair があるのと同じ意味で、この関係式の背景を明らかにした。これは行列式以外でも permanent や immanant に関して同様のカペリ型恒等式が存在することを保証する。和地のカペリ型恒等式は一般線型群のなす dual pair に付随するが、他の dual pair でも似た関係式が考えられる。

この研究を整理する中で、多くの dual pair が「二つの添字を持つ掛け算作用素と微分作用素の組」で表されることに気づいた。一部の dual pair がこのように表されることは以前からわかっていたが、置換に対するある種の微分作用素を考えることでこの表示がずっと一般化される。この形式で表されるということはある種のカペリ型恒等式を定式化する可能性にもつながる。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している

(理由) 当初計画していた直交リー環やシンプレクティックリー環への拡張は、それほど進展していない。しかしもっと困難であると考えていた量子群への拡張は予想を越えてうまく進展している。和地氏の発見したカペリ恒等式に関する成果や dual pair に関する新しい視点も得られており、総合的には概ね順調にカペリ元の研究が進んでいる。

4. 今後の研究の推進方策

昨年度得たテンソル代数と無限対称群の融合代数の q 類似を利用して、量子群の表現論・不変式論を詳しく調べる。またこの q 類似を参考にして、同時に dual pair に関する新しい視点(二つの添字を持つ掛け算作用素と微分作用素の組を用いて表す)なども活用して、直交リー環やシンプレクティックリー環と相性のよいテンソル代数の拡張を構成する。そしてこれを武器にして、大きな目標である直交リー環やシンプレクティックリー環における quantum immanant の構成を目指す。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

①伊藤稔, テンソル代数上の微分の q 類似と q Schur-Weyl 双対性, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1722, 90-96(2010). 査読なし

②Minoru Itoh, On extensions of the tensor algebra, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis. Mathematics for Innovation in Industry and Science (edited by Gerrit van Dijk and Masato Wakayama, ISBN 978-3-11-022612-6, DE GRUYTER), 135-145 (2010). 査読あり

③Minoru Itoh, Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras, International Journal of Mathematics, Vol.20, No.3, 339-368 (2009). 査読あり

④Minoru Itoh, Schur type functions associated with polynomial sequences of binomial type, Selecta Mathematica (N.S.), Vol.14, No.2, 247-274 (2009). 査読あり

⑤伊藤稔, 二項型多項式列に付随するシューア型関数と普遍包絡環の中心元の固有値, 数理解析研究所講究録別冊 B7, 157-176 (2008). 査読あり.

[学会発表] (計 9 件)

①Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, Workshop on Invariant Theory and Related Topics (Inha University, Korea), 2010年2月17日, 18日, 19日

②Minoru Itoh, On extensions of the tensor algebra, Forum "Math-for-Industry" Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis (Kyushu University), 2009年11月11日

③伊藤稔, テンソル代数の拡張とその応用, 第54回代数学シンポジウム(明治大学), 2009年8月6日

④Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their application to immanants, JSPS-RFBR Workshop, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization (Derzhavin Tambov State University, Russia), 2008年9月26日

⑤Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their application to Schur-Weyl type dualities, JSPS-RFBR Workshop, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization (Tambara Institute of Mathematical Sciences, The University of Tokyo) 2008年8月28日