様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　5 月　4 日現在

機関番号：17701
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008～2011
課題番号：20740020
研究課題名（和文）　カペリ型恒等式とリー環の普遍包絡環の研究

研究課題名（英文）　Capelli type identities and enveloping algebras of Lie algebras

研究代表者
伊藤　稔（ITOH MINORU）
鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：60381141

研究成果の概要（和文）：第一の成果は，テンソル代数における微分概念を導入して，それをテンソル代数やリー環の普遍包絡環などの非可換代数における不変式論に応用したことである．さらにこの結果の q 類似も得た．第二の成果は，多項式環と外積代数における不変式論の第一・第二基本定理の多くの系列の発見である．この第二基本定理の背後には Cayley-Hamilton 型の定理があり，外積代数の結果については Polynomial Identity の理論との結びつきも得た．

研究成果の概要（英文）：The first result is the notion of derivations on tensor algebras and its applications to the invariant theory of noncommutative algebras (e.g. tensor algebras or universal enveloping algebras of Lie algebras). I also obtained a q-analogue of these results. The second result is some series of first and second fundamental theorems of invariant theory for polynomial algebras and exterior algebras. We have Cayley-Hamilton type theorems behind these second fundamental theorems. In addition, these second fundamental theorems for exterior algebras are closely related to the theory of polynomial identities.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：表現論・不変式論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：テンソル代数，dual pair，外積代数，不変式論の第一・第二基本定理，Cayley-Hamilton の定理，普遍包絡環の中心元，量子群

１．研究開始当初の背景

一般線型リー環の普遍包絡環では Capelli 元という性質のよい中心の生成元が知られていて，外積代数を利用した非可換母函数でこれらを扱う手法も発展していた．しかし中心の線型基底である quantum immanant については非可換母函数による簡明な扱いはできていなかった．さらに一般線型リー環以外の古典リー環となると，普遍包絡環の中心の生成元についても限定的なことしかわかっておらず，ましてや中心の線型基底については具体的なことはほとんど何もわかってい

なかった．

研究開始時は，この状況を打ち破る目的で，quantum immanant を非可換代数における母函数で扱いたいと考えていた．そのための具体的なアイデアとしてテンソル代数の拡張を考えていた．つまりテンソル代数における微分概念を導入し，その性質を調べて，そしてそれを利用して（Capelli 型恒等式などの形で）テンソル代数における不変式論を研究したり，quantum immanant を非可換母函数のかたちで見通しよく扱ったりする道具としての可能性をさぐっている時期だった．

２．研究の目的

本研究の目的は，dual pair や無重複表現などの現代的な視点の下で Capelli 恒等式をとらえなおし，その一般化・深化を行い，これを通じて普遍包絡環やテンソル代数などの非可換代数における不変式論を推進することだった．

リー環の普遍包絡環は表現を構成したり調べたりする手段として役立つ．特にその中心元は表現を調べる上で非常に重要である．普遍包絡環の中心の構造は Harish-Chandra らにより解明されているが，このような応用のためには抽象構造がわかるだけでは十分ではない．中心元が具体的に構成できて，様々な表現における作用がきちんと計算できる必要がある．このような具体的な要求に対して現状はまだ満足できる段階ではない．

しかし一般線型リー環の場合には Capelli 元という普遍包絡環の中心元が知られており，上記のような具体的な問題にも答えられる．この Capelli 元は dual pair，無重複表現の観点からも興味深い．dual pair における二つの普遍包絡環の中心と不変微分作用素環の間の自然な準同型を具体的に記述することは一般には難しいが，一般線型群のなす dual pair の場合は Capelli 元を用いてはっきり記述できる（これが有名な Capelli 恒等式である）．本研究の目標はこれらの精密な結果を他のリー環，表現に拡張し，さらにそれを手がかりにして，表現論や非可換代数の不変式論を精密化・深化することだった．

とくに具体的な目標として，テンソル代数における微分概念を利用して，普遍包絡環の中心の基底やテンソル代数などの非可換代数の不変式論を調べることを目指していた．

３．研究の方法

当然のことながら，さまざまな戦略を用意してはいても研究は計画通りに進むとは限らず，ある程度行き当たりばったりに前進するものである．実際には，以下のような流れで研究は進んだ．(1)はおおむね当初の研究計画に沿ったものである．一方(2)はもともと意図していたものではなかったが，研究が進むうちに本課題の目標である非可換不変式論につながっていった．

(1) テンソル代数における微分概念を利用して非可換不変式論を推進するという計画は当初の意図どおりの活躍を見せた．さらに Schur-Weyl 双対性（やその一般化）の新証明などに役立つこともわかったのは，期待以上の成果であった．これをさらに他の双対性や普遍包絡環に一般化しようと考えたが，直交群やシンプレクティック群に関する Brauer-Weyl 双対性にはうまく拡張できず，その一方で q Schur-Weyl 双対性への拡張は非常にうまく進んだ．代数の結合法則を作用の双対性に結びつけるアイデアは，またいくつかの成功を生んだ．

(2) ある多項式環における不変式論の問題が，ベクトル不変式に関する不変式論の第一・第二基本定理を利用してうまく解決できることに気づいた（一種の記号的方法）．さらに同じ手法を外積代数の場合に適用することで，外積代数における不変式論のいろいろな事実や Polynomial identity の理論との結びつきが得られることにも気づいた．これは手法も結果ももともと意図していたものではなかったが，結果的には本課題の目的である非可換不変式論の問題につながっていった．

４．研究成果

(1) テンソル代数を自然に含む代数を構成した．この代数には，ある種の微分作用素が自然に作用し，興味深い性質が成り立つ．この微分作用素を付け加えることで Weyl 代数や Clifford 代数の類似も得られる（正確には Weyl 代数や Clifford 代数は商代数としてこの大きな代数に含まれる）．このテンソル代数の拡張と微分作用素の枠組みを利用して，immanant という行列函数，そして一般線型リー環の普遍包絡環の中心の線型基底である quantum immanant を研究した．Higher Capelli identity の簡潔な新証明などが主な成果である．またこのテンソル代数の拡張の別の応用として，テンソル代数における不変式論についても研究を進めた．たとえば Capelli 型恒等式を利用して不変式論の第一基本定理を証明したのが，ひとつの成果である．またこの枠組みを利用して一般線型群に関する Schur-Weyl 双対性やその一般化が簡潔に証明できる．以上の成果は，論文 Extensions of the tensor algebra and their application としてまとめた．

この代数と微分作用素の q 類似を構成することもできた．これは一般線型リー環上の量子展開環の表現を調べるのに利用できる．例えば，この量子展開環と Iwahori-Hecke 代数との双対性も簡潔に証明できる．現在はこれを発展させて量子展開環の表現論や不

変式論の研究に活用したいと考えている．
双対性に関する考察から，和地輝仁の発見した「odd な」Capelli 型恒等式に関する成果も生まれた．この関係式は微分作用素を成分とする奇数個の行列の行列式の積公式と見なせる．この行列(の積)の成分が互いに可換であることは和地自身が発見していたが，より強くこれらの行列成分と可換な微分作用素がすべてこの行列成分から生成されることがわかった．この事実は，和地の関係式の存在をある意味で保証する．すなわち同じタイプの関係式が存在することが，抽象的な議論でこの事実から導ける．通常のカペリ恒等式の背景に dual pair があるのと同じ意味で，この関係式の背景が明らかになったことになる．同時にこれは行列式以外でも permanent や immanant に関して同様の Capelli 型恒等式が存在することを保証する．和地の Capelli 型恒等式は一般線型群のなす dual pair に付随するが，他の dual pair でも似た関係式が考えられる．

(2) 多項式環と外積代数における不変式論の第一・第二基本定理の多くの系列を発見した．これらはすべてベクトル不変式の第一・第二基本定理から導出される．この第二基本定理の背後には Cayley-Hamilton 型の定理がある．また外積代数の結果については Polynomial Identity の理論との結びつきも得た．

第一の結果は通常の多項式環における不変式論の結果である．古典群に関する不変式環の８つの系列について，不変式論の第一基本定理と第二基本定理を得た．第二基本定理は Schur 多項式を用いた比較的単純な関係式で記述される（ただし現時点では８系列のうち 3 系列の記述はまだ少し複雑で，Schur 多項式の形までは整理できていない）．またこの 8 種類の第二基本定理の背後には，それぞれ少しずつかたちの異なった高次の Cayley-Hamilton 定理がある．

第二の結果は，外積代数における不変式論に関するものである，n 次の正方行列のなすベクトル空間の上の外積代数に n 次の一般線型群が自然に conjugation で作用する．この作用に関する不変元について調べ，次のような結果を得た．まずこの不変元のなす部分代数は n 個の元で生成される外積代数に同型となることがわかった．そしてこれらの不変元の生成元を係数とする Cayley-Hamilton 型の定理を得た（これはまた不変式論の第二基本定理の一種と見なすこともできる）．これらは固有多項式に関する初等的な線型代数の結果の反可換版と見なせる．さらにこの Cayley-Hamilton 型の定理は，Polynomial identity の理論の先駆けになった Amitsur-Levitzki 定理の精密化とも見なせる．舞台となる外積代数と作用する群を取り替えることによって Kostant による Amitsur-Levitzki 定理の類似の新証明や新しい Amitsur-Levitzki 型の定理も同じような方法で得られる．以上の結果に加えて，対称式の理論の反可換版に当たるさまざまな結果も得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）
① Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, Commmunications in Algebra, 査読あり, 印刷中,2012.
② Minoru Itoh, On extensions of the tensor algebra, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, Mathematics for Innovation in Industry and Science (edited by Gerrit van Dijk and Masato Wakayama) DE GRUYTER, 査読あり, 2010, 135―145.
DOI: 10.1515/9783110226133.135
③ 伊藤稔, テンソル代数上の微分の q 類似と q Schur-Weyl 双対性, 京都大学数理解析研究所講究録 Vol. 1722, 査読なし, 2010, 90―96.
④ Minoru Itoh, Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras, International Journal of Mathematics Vol.20, No.3., 査読あり, 2009, 339―368.
DOI: 10.1142/S0129167X09005327
⑤ Minoru Itoh, Schur type functions associated with polynomial sequences of binomial type, Selecta Mathematica (N.S.) Vol.14, No.2, 査読あり, 2009, 247―274.
DOI:10.1007/s00029-008-0061-0
⑥ 伊藤稔, 二項型多項式列に付随するシューア型函数と普遍包絡環の中心元の固有値, 数理解析研究所講究録別冊 B7, 査読あり, 2008, 157―176.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B7/pdf/B7-13.pdf

〔学会発表〕（計７件）
① Minoru Itoh, Invariant Theory for Exterior Algebras, The 7th Kagoshima Algebra–Analysis–Geometry Seminar, (2012 年 2 月 16 日), 鹿児島大学.
② Minoru Itoh, A mixture of the tensor algebra and the infinite symmetric group and its application to the Schur-Weyl duality, MPI-Oberseminar, (2011 年 5 月 5 日), Max-Planck-Institute for mathematics, Germany.

③ Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, Workshop on Invariant Theory and Related Topics, (2010年2月17日—2月19日(連続講演)), Inha University, Korea.
④ Minoru Itoh, On extensions of the tensor algebra, Forum "Math-for-Industry" Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, (2009年11月11日), Kyushu University.
⑤伊藤稔, テンソル代数の拡張とその応用, 第54回代数学シンポジウム, (2009年8月6日), 明治大学.
⑥ Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their application to immamants, JSPS-RFBR Workshop "Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization," (2008年9月26日), Derzhavin Tambov State University, Russia.
⑦ Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their application to Schur-Weyl type dualities, JSPS-RFBR Workshop "Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization," (2008年8月28日), Tambara Institute of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.

６．研究組織
(1)研究代表者

伊藤　稔 (ITOH MINORU)
鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：60381141