

機関番号：22604

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008 年度 ～ 2010 年度

課題番号：20740022

研究課題名 (和文) 代数多様体の分類理論と導来圏

研究課題名 (英文) Classification theory of algebraic varieties and derived categories

研究代表者

上原 北斗 (Uehara Hokuto)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：80378546

研究成果の概要 (和文) : Bridgeland の安定性条件、双有理 Torelli の反例、ある種の代数多様体 (次元が低い場合や、3次元トーリックファノ多様体) の導来圏のある種の生成元の存在など、代数多様体の導来圏に関するいくつかの結果を得た。

研究成果の概要 (英文) : I obtain some results on Bridgeland stability, a counterexample of birational Torelli problem, and the existence of certain generators of derived categories of certain varieties (like toric Fano 3-folds and so on).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：導来圏、トーリック多様体

1. 研究開始当初の背景

代数多様体上の接続層の導来圏はミラーシンメトリーなどに関わる物理学、マッカイ対応をはじめとした表現論、微分幾何など、様々な分野と関わって、近年目覚ましい発展を遂げている。そんな中私は特に (特に高次元の) 代数多様体の分類論の関わりから導来圏を調べ始めた。

2. 研究の目的

(1) 導来圏を代数多様体の不変量としてとらえ、導来圏が同じであるような多様体 (Fourier—Mukai partner) の特徴付けや数え上げを実行する。手始めとして楕円ファイブレーションを持つような代数曲面の

Fourier—Mukai partner を調べる。

Bridgeland と Maciocia の結果から小平次元が 0 でない楕円曲面の Fourier—Mukai partner は元の楕円曲面のある種の層のモジュライ空間で得られる。

その結果を用いて Fourier—Mukai partner の数え上げを行う。

(2) 導来圏から決まる Bridgeland の意味での安定性条件の空間などを調べる。

元々は安定性条件の空間は 3次元カラビヤウ多様体のミラーシンメトリー-の文脈で現れるが、手始めに 2次元局所カラビヤウ多様体、つまり A_n 型特異点の極小特異点解消に関して Bridgeland の安定性条件の空間を調べる。

(3) 与えられた代数多様体の導来圏に対し、良い生成元を見つけ、それに関わって決まる

非可換環上の加群の導来圏を調べる。
また生成元を変えてみてそれに伴って、非可換環の導来圏がどのように変わるか見る。

3. 研究の方法

(高次元)代数多様体の分類理論や、多元環や有限群の表現論を駆使し、導来圏を調べる。

(1) 上記のように代数多様体の Fourier—Mukai partner の研究をしては、手始めとして楕円ファイブレーションを持つような代数曲面の Fourier—Mukai partner を調べた。

(2) 上述のように Bridgeland の安定性条件の空間の研究の手始めとして、2次元局所カラビヤウ多様体である A_n 型特異点の極小特異点解消に関して Bridgeland の安定性条件の空間を調べた。

そのためにはまず、その自己同値群の生成元を調べることが必須であったのでそれを行った。

その後、その結果を使って、まず安定性条件の空間の連結性を調べ、さらにホモロジカル・ミラーシメトリーを使って、単連結性を調べた。

(3) 生成元を見つける問題では、まず Van den Bergh の方法を一般化し、Van den Bergh の結果を高次元化した。

さらにその方法を使って、グラスマンの余接層の導来圏などの導来圏の生成元を見つけた。

また、構造層のフロベニウス写像の直像を使ってトーリック多様体の導来圏の生成元を見つけた。

4. 研究成果

(1) 私は大阪大の植田氏、広島大の石井氏とともに A 型特異点の極小特異点解消で得られる多様体の Bridgeland の安定性条件の空間を決定した。正確にはこの空間が単連結かつ連結であることを示した。

連結性は以前、この多様体の導来圏の自己同値群の生成元を見つけたが、その結果の応用である。

また単連結性に関してはホモロジカルミラーシメトリーを用いた。

安定性条件の空間はしばしば単連結かつ連結であると信じられているが、なかなかそれを調べるのは難しく、我々の結果はその特殊な場合を示した結果である。

(2) 有理楕円曲面同士のファイバー積で得られる3次元多様体を使って、双有理 Torelli の反例、つまり導来同値、ホッジ構造が同型であるような多様体で、双有理でないような例を得た。

導来圏を用いない結果としては Szendroi が3次元カラビヤウ多様体の時に研究していたが、双有理でないことまでは示していない。また Borisov—Caldararu は双有理でないが導来同値な3次元カラビヤウ多様体の例を発見しているが、彼らはホッジ構造が同じであることまでは見ていない。

私の結果は双有理トレリの反例を、導来圏を用いて示す点が新しいところである。これは以前有理楕円曲面のフーリエ向井パートナーを示した時の結果を一部拡張することで得られた。

(3) 導来圏の生成元は色々あるが、私の考えた生成元(generator)は、その orthogonal が零対象になる、というのが定義である。

また、導来圏の対象が tilting 対象であるとは、その高次の自己準同型が自明になるものである。

対象が tilting generator となる時、導来圏はその対象の自己準同型環上の加群の導来圏を同値になることが知られている。

このような同値はしばしば色々な状況で現れ、マッカーイ対応はその一例である。

その現象自体面白いが、また代数多様体の導来圏がある種の非可換環上の加群の導来圏と同値になることにより、多元環の表現論が応用できる点も重要である。

私は戸田氏との共同研究で、それまで知られていた、Van den Bergh 氏の結果、つまりファイバーの次元が高々1次元であるような射影的写像を持つある種の代数多様体に対し、その導来圏は tilting generator を持つ、という結果をファイバー次元が2次元の場合に拡張し、その応用として、グラスマン多様体 $G(4,2)$ の余接束の導来圏の tilting generator を発見した。

さらに向井フロップで結ばれる多様体の導来同値もこの方法で示した。

またトーリック多様体では標数によらずフロベニウス写像(の類似)が定義される。

私は構造層のフロベニウス順像を用いることで3次元トーリックファノ多様体の導来圏のある種の生成元(full strong exceptional collection)の存在を示した。full strong exceptional collection とは導来圏の tilting generator のうち特に性質の良いもので、導来圏に、このような対象を持つ代数多様体は非常に稀で、見つかっているのは有理的なものに限られている。

構造層のフロベニウス順像が導来圏を生成することは Bondal が予想していたが、私は論文の中でこの主張を示すことによって、

full strong exceptional collection を見つけることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1 Hokuto Uehara A counterexample of the birational Torelli problem via Fourier--Mukai transform, 査読あり J. Algebraic Geom, 受理済み.

2 Hokuto Uehara, Akira Ishii, Kazushi Ueda, Stability conditions on A_n -singularities, 査読あり J. Differential Geom. 84 (2010), 87-126.

3 Hokuto Uehara, Yukinobu Toda, Tilting generators via ample line bundles, 査読あり Advances in Mathematics. 233 (2010), 1-29.

4 Hokuto Uehara Osamu Fujino, Hiroshi Sato, Yukishige Takano, Three-dimensional terminal toric flip, 査読あり Cent. Eur. J. Math. 7. (2009). 46-53.

[学会発表] (計 8 件)

1 上原 北斗 “Generators by Frobenius push-forward on smooth toric surfaces”, Workshop on Non-commutative Geometry and the McKay Correspondence 2011年3月15日 名古屋大学(招待講演)

2 上原 北斗 “Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry”, 代数幾何とホモトピー論の新展開 2010年12月17日 東京都市大学 (招待講演)

3 上原 北斗 “McKay correspondence and derived categories”, 都の西北 代数幾何学シンポジウム 2010年11月11日早稲田大学(招待講演)

4 上原 北斗 “Tilting generators via ample line bundles”, Summer meeting of the Canadian Mathematical Society (カナダ, University of New Brunswick)., 2010年6月7日、(招待講演)

5 上原 北斗 “Fourier--Mukai numbers of minimal elliptic rational surfaces”, Summer meeting of the Canadian Mathematical Society (カナダ, Memorial University of Newfoundland). 2009年6月5日、(招待講演)

6 上原 北斗 “Fourier--Mukai numbers of minimal elliptic rational surfaces”, 「第4回代数、解析、幾何セミナー」 (鹿児島大学). 2009年2月18日、(招待講演)

7 上原 北斗 “Tilting generators via ample line bundles”, 国際研究集会 「Interactions Between Noncommutative Algebra and Algebraic Geometry」 (カナダ, バンフ, BIRS). 2009年10月29日、(招待講演)

8 上原 北斗 “Tilting generators via ample line bundles”, 国際研究集会 「Vector bundles」 (インド, ムンバイ, TATA 研究所). 2008年3月6日、(招待講演)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

上原 北斗 (Uehara Hokuto)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：80378546

(2)研究分担者

なし ()

研究者番号：

(3)連携研究者

なし ()

研究者番号：