様式C-7-2

自己評価報告書

平成　23年　5月　25日現在

機関番号：33704
研究種目：若手研究（B）
研究期間：　2008～2011
課題番号：20740026
研究課題名（和文）　トーリック多様体上の中間次元サイクルの研究

研究課題名（英文）　Studies on cycles of intermediate dimensions on toric varieties

研究代表者
佐藤 拓（Sato Hiroshi）
岐阜聖徳学園大学・経済情報学部・准教授
研究者番号：20433310

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数学，幾何学

１．研究計画の概要

(1)トーリック多様体上のトーラス不変な２サイクルを，組み合せ論的に容易に扱えるようにして，交点数等の計算を容易にする．通常のトーリック森理論と同様に扱えるようにすることが目標である．
(2)トーリック多様体上の有効的２サイクルの数値的同値類全体のなすコーン，所謂２森コーンを研究して，特にその端射線とトーリック多様体の射の間の関係を明らかにする．逆にこの理論を応用して，射から端射線を決定することが一つの大きな目標である．
(3)応用として，トーリック・２ファノ多様体の分類を行う．
(4) (1)～(3) で行ったことを,更に高次のサイクルに対しても考察する．
(5)通常のトーリック森理論に関しても，並行して理解を深め，本研究に応用，一般化を試みる．(4)の研究に対しても，通常のトーリック森理論の発展は不可欠である．

２．研究の進捗状況

(1)トーリック多様体上のトーラス不変な２サイクルを，対応する扇の情報で表す方法を確立した．この方法は，リードやバティレフによる壁関係式や原始的関係式の２サイクルバージョンであり，扇の生成元の間の斉次二次式によって２サイクルを表したものである．この二次式を見ることにより，例えば，トーラス不変な２コサイクルとの交点数等が簡単に計算出来る．
(2)ある種のトーリック多様体に対して，その２森コーンを考察し，幾つかのトーリック多様体において，端射線とある種の収縮写像が対応していることをチェックした．通常の森理論とは異なり，複数の収縮写像が対応することもある．一般的な性質の研究は，これからの課題である．
(3)(1)の応用として，低次元のトーリック・ファノ多様体について，第二チャーン標数と２サイクルたちとの交点数を計算し，２ファノ性の判定を行った．この計算過程では，コンピューターを補助的に用いている．
(4)ピカール数が低い場合（１，２，３）について，更に高次の有効的サイクルのなすコーンを考察した．２サイクルの場合と同様に，斉次多項式が対応することが予測されるが，これについても一般的な性質の研究はこれからの課題である．
(5)通常の森理論に関する結果としては，主として以下のものがある．
①３次元のトーリック・フリップの分類を行った．特異点を持つ場合も扱っている．
②局所的性質として，ファノ多様体の相対的バージョンとも言うべきトーリック射を，３次元の場合について分類を行った．
③トーリック多様体であって，全ての非自明なネフ直線束が巨大になるようなものの分類を行った．

３．現在までの達成度

②おおむね順調に進展している．
(理由)
一般論の部分，すなわち２森コーンの端射線とトーリック射の関係の部分に関しては，困難な面が多々あり，少々遅れ気味である．しかし，組み合せ論的な部分に関しては，通常のトーリック森理論とほぼ同等の結果が得られていると思う．また，その応用も低次元のトーリック・２ファノ多様体の分類という結果で得られており，今後も続けて発展が期待出来ると思う．

その一般論の部分であるが，組み合せ論的な部分が順調なことにより，具体的な例の考察が容易になり，今後の発展が期待出来るはずである．

以上により，研究計画と比較すると，遅れている部分と進んでいる部分の差があるが，今後の進展に関してはある程度の見通しが立っており，問題は無いと思われる．

４．今後の研究の推進方策

(1) ２森コーンの端射線からトーリック射を構成する方法を確立することが最も重要な課題である．階数２のベクトル束を元に，グラスマン多様体や旗多様体への中への射を構成するのが理論的に正しいと思われるので，具体例の考察を交えて研究していく．

(2)高次サイクルに対しても理論の発展を得る．組み合せ論的な側面を見ると，この理論に対しては，通常のトーリック森理論の深い理解が必要であると思われる．トーリック曲面の森理論がシンプルであったことが２サイクルの場合の理論につながっているわけであるが，３次元以上でどのような解釈が必要であるか，とても興味深いと思う．

(3)トーリック・２ファノ多様体の分類を完成させる．低次元の分類結果より，ある程度の性質を持ってトーリック・２ファノ多様体が現れているので，その現象が一般次元で成立するかどうかをチェックするのが先決である．それが上手く行った場合，さらに高次のファノ多様体の分類を考えていきたい．また，高次ファノ多様体の幾何学的な意味は未知数であると思うので，それを本研究により明らかにさせていくことも重要である．

５．　代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

①O. Fujino and H. Sato, Smooth projective toric varieties whose nontrivial nef line bundles are big, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85 (2009), 89-94.

② H. Sato, Three-dimensional toric morphisms with anti-nef canonical divisors, Comm. Alg. 37 (2009), 2325-2336.

③ O. Fujino, H. Sato, Y. Takano and H. Uehara, Three-dimensional terminal toric flips, Cent. Eur. J. Math. 7 (2009), 46-53.

〔学会発表〕（計　10 件）

① 佐藤　拓，Toric Fano manifolds with non-negative second Chern characters，九州大学数理学研究院，代数幾何学研究集会 – ファノ多様体と正標数上の話題を中心として –，2011 年 2 月 21-23 日．

② H. Sato, Toric Mori theory and Fano manifolds I, II, III, IV（四回連続講演），大阪市立大学理学部数学教室，Toric Topology with applications in combinatorics，2010 年 12 月 1-3 日．

③ H.Sato，Cones of effective two-cycles on toric manifolds, Steklov Mathematical Institute of RAS and Moscow State University, The International Conference ``GEOMETRY, TOPOLOGY, ALGEBRA and NUMBER THEORY, APPLICATIONS'', 2010 年 8 月 16-20 日．

④ 佐藤　拓，Three-dimensional toric morphisms with anti-nef canonical divisors，関西学院大学大阪梅田キャンパス，アフィン代数幾何学研究集会，2010 年 3 月 4-7 日．

⑤ H. Sato, Two-cycles on toric Fano manifolds，東北大学大学院理学研究科，東北復旦代数幾何合同シンポジウム，2009 年 11 月 24-26 日．

⑥ 佐藤 拓，トーリック多様体上の中間次元サイクル，高知大学理学部，研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2008」，2008 年 11 月 1 日-3 日．

⑦ 佐藤 拓，トーリック多様体上の中間次元サイクル，北海道大学大学院理学研究科，研究集会「代数幾何の関連する諸分野」，2008 年 7 月 23-25 日．