

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2009

課題番号：20740029

研究課題名（和文） ラグランジュファイバー空間における局所トーラス作用の研究

研究課題名（英文） Local torus actions on Lagrangian fibrations

研究代表者

吉田 尚彦（YOSHIDA TAKAHIKO）

明治大学・研究・知財戦略機構・研究員

研究者番号：70451903

研究成果の概要（和文）：前量子化束を持つ特異 Lagrange ファイバー束について、Riemann-Roch 数が Bohr-Sommerfeld ファイバーの個数と一致する現象がさまざまな事例で報告されている。この現象が起こるメカニズムを解明するため、Witten 摂動に基づく指数の局所化の観点から研究を行い、以下の成果を得た。

- 1 開多様体上の Dirac 型作用素に対して指数を定式化する枠組みを与え、その指数に対して局所化定理を証明した。
- 2 その応用として、前量子化束を許容する特異 Lagrange ファイバー束について、Riemann-Roch 数が非特異 Bohr-Sommerfeld ファイバーの個数と特異ファイバーからの寄与で表せることを証明した。

研究成果の概要（英文）：It has been often observed that for various singular Lagrangian fibrations with prequantizing line bundle the Riemann-Roch numbers agree with the numbers of Bohr-Sommerfeld fibers. I tried to make clear the mechanism of these phenomena from the viewpoint of Witten's deformation, and obtained the following results:

- 1 I gave a framework of localization for the index of a Dirac-type operator on an open manifold, and proved a localization theorem for the index.
- 2 As an application I showed that for a singular Lagrangian fibration with prequantizing line bundle the Riemann-Roch number is described as the sum of the numbers of nonsingular Bohr-Sommerfeld fibers and contributions from singular fibers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ディラック型作用素，指数，局所化，ラグランジュファイバー束，幾何学的量子化，シンプレクティック幾何

## 1. 研究開始当初の背景

$(M, \omega)$  を閉シンプレクティック多様体,  $(L, \nabla)$  を  $(M, \omega)$  上の前量子化束とする. シンプレクティック構造  $\omega$  と整合的な概複素構造を 1 つ固定すると  $L$  を係数とする  $\text{spin}^c$  Dirac 作用素が得られる. この  $\text{spin}^c$  Dirac 作用素の指数を Riemann-Roch 数 (以下, RR 数) と呼ぶ. RR 数はシンプレクティック構造のみに依存することが知られている.

さらに,  $(M, \omega)$  に Lagrange ファイバー束の構造  $\pi : (M, \omega) \rightarrow B$  があると仮定する.  $\pi$  のファイバー  $\pi^{-1}(b)$  で,  $\pi^{-1}(b)$  への  $(L, \nabla)$  の制限が非自明な大域的平行切断を持つものを Bohr-Sommerfeld (以下, BS) であるという. BS ファイバーは離散的に現れることが知られている.

このとき, RR 数は BS ファイバーの個数と一致することが Andersen によって知られている.

ところで, 特異ファイバーを許容する Lagrange ファイバー束もさまざまなところに現れる. 典型例が, 非特異射影的トーリック多様体の運動量写像である. トーリック多様体の運動量写像の特異ファイバーは滑らかな多様体なので, 特異ファイバーに対しても BS ファイバーの定義が意味を持つ. この場合も RR 数と BS ファイバーの個数が一致することが Danilov によって示されている.

同様の現象が成り立つことが, 複素旗多様体上の Gelfand-Cetlin 完全可積分系, Riemann 面上の平坦  $SU(2)$  束のモジュライ上の Goldman 完全可積分系などで, 両者を別々に計算し比較することで, 確かめられている.

さらに, シンプレクティック形式が退化した状況においても, BS ファイバー (に相当するもの) を重み付きで数えることにより, 同様の現象がなりたつことがさまざまな場合に観察されている.

量子力学の観点からは, RR 数, BS ファイバーの個数はそれぞれ,  $\text{spin}^c$  量子化, 実偏極を用いた幾何学的量子化と呼ばれる二通りの量子化で得られる Hilbert 空間の次元に対応する. これら二通りの量子化が等価であるかどうかは基本的かつ重要な問題であるが, まだ未解決である.

私自身も, トーリック多様体の運動量写像の

一般化である非退化, 楕円型特異ファイバーを持つ特異 Lagrange ファイバー束についてこの問題を考察した. 非退化, 楕円型特異ファイバーを持つ特異 Lagrange ファイバー束には局所的にはトーリック多様体の構造があり, ある種の整合性を持って張り合っている. このような構造が, RR 数と BS ファイバーの個数の関係を調べる上で, トーリック多様体の場合と同様の役割を果たすのではないかと考え, 数学的に定式化し, この構造に対する位相不変量を定義し, これらを用いてこの構造を位相的に分類した. この構造を局所トラス作用と呼ぶ. 局所トラス作用を用いて RR 数と BS ファイバーの個数の関係を調べたところ, これまで調べた全ての具体例について RR 数が BS ファイバーの個数と一致していた.

## 2. 研究の目的

当初の目的は, 非退化, 楕円型特異ファイバーを持つ特異 Lagrange ファイバー束が前量子化束を持つ場合に, RR 数と BS ファイバーが一致するメカニズムを, 局所トラス作用を用いて解明することであった.

しかし, 研究を進めるうちに, この現象は Witten 摂動に基づく Dirac 型作用素の指数の局所化として捉えるのが自然であると考えに至った. そこで, 上記の現象が起こるメカニズムをこの観点から解明することを目的とすることにした.

## 3. 研究の方法

Witten 摂動のアイデアに基づいて Dirac 型作用素を摂動し, 指数の局所化として上の現象を理解する.

初めに Witten 摂動を説明する.  $M$  を Riemann 多様体,  $W$  を  $M$  上の  $Z/2Z$  次数付き  $C1(TM)$  加群束,  $D$  をその上の Dirac 型作用素とする. 非負パラメータ  $t$  と Clifford 積と反可換な Hermite 変換  $h$  に対して,  $D_t = D + th$  とおく. このとき, 十分大きいパラメータ  $t$  に対して,  $D_t$  の指数は  $h$  の台上のデータで記述できることが知られている. これは,  $t$  が十分大きければ,  $D_t$  の Laplacian の固有関数が  $h$  の台以外では急減少するという事実から従う.

前量子化束を持つ特異 Lagrange ファイバー束の一般ファイバーは, 全空間がコンパクト, 連結ならば, トラスであることが Arnold-Liouville によって知られている. このことを用いると, ファイバーの BS 条件を

「ファイバー上で前量子化束を係数とする de Rham 作用素の核が非自明」という解析的な条件に置換える事ができる。

これを踏まえて、この研究では、Witten 摂動の摂動項  $h$  として、ファイバーに沿った de Rham 作用素を採用し、Witten 摂動の無限次元アナロジーを行った。

#### 4. 研究成果

初年度は、前量子化束をもつ（非特異）Lagrange ファイバー束について、RR 数と BS ファイバーの個数が一致することを、Witten 摂動のアイデアに基づく Dirac 型作用素の指数の局所化によって、単に数の一致だけでなく一点上の  $K$  群の元の間で等式として示すことができた。ここでのポイントは、ファイバーの BS 条件をファイバー上の前量子化束を係数とする de Rham 作用素の核が非自明であるという条件に読み替えることである。

2 年目は、初年度の手法を特異ファイバーのある場合にも拡張した。その結果、シンプレクティック多様体のみならず、一般の開 Riemann 多様体上の Dirac 型作用素に対して指数を定式化する枠組みを与え、その指数の性質のひとつとして、局所化定理が成り立つことを証明した。開多様体上の楕円型作用素の指数の定式化には、境界条件として Atiyah-Patodi-Singer 型の解析的な境界条件をおくものがよく知られているが、この定式化では、ある非輪状条件を満たすトーラスファイバー束の族という幾何学的な構造を境界条件に用いる。また、定式化された指数のさまざまな計算例を与えた。

その応用として、前量子化束を許容する特異 Lagrange ファイバー束について、RR 数が非特異 BS ファイバーの個数と特異ファイバーからの寄与で表せることを証明した。特に、この結果と局所トーラス作用を用いることによって、全空間が 4 次元の非退化、楕円型特異ファイバーを持つ特異 Lagrange ファイバー束について、RR 数が特異・非特異両方の BS ファイバーの個数と一致することが示された。

この研究は、RR 数と BS ファイバーの個数に関する一連の現象について、Witten 摂動に基づく指数の局所化の観点からこの現象が生じるメカニズムを捉えようとするものである。現時点ではこの現象を非常によく説明できているものの、メカニズムの完全な解明には至っていない。この研究をさらに進めることにより、RR 数と BS ファイバーの個数の関係のみならず、Guillemin-Sternberg による

量子化予想のように、これまで別々に捉えられていたものが、Dirac 型作用素の指数の局所化を通じて、統一的に理解できるようになると期待される。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

- ① 藤田玄, 古田幹雄, 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index II, UTMS Preprint Series, 査読無, 2009-21, 64 pages. <http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/preprint/pdf/2009-21.pdf>
- ② 藤田玄, 古田幹雄, 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index I, J. Math. Sci. Univ. Tokyo に掲載予定, 査読有.
- ③ 吉田尚彦, On manifolds which are locally modeled on the standard representation of a torus, Noncommutativity and Singularities, 353-363. Adv. Stud. Pure Math. 55, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009. 査読有.
- ④ 吉田尚彦, On liftings of local torus actions to fiber bundles, Toric Topology, 391-401. Contemp. Math. 460, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. 査読有.

〔学会発表〕（計 14 件）

- ① 吉田尚彦, RR=#BS via localization of index, 連続講演 (全 7 回), KAIST Toric Topology Workshop 2010, KAIST (Daejeon, Korea), 2010 年 2 月 23 日~3 月 2 日.
- ② 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 第 36 回変換群論シンポジウム, 大阪市立大学, 2009 年 12 月 10 日.
- ③ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 2009 年 10 月 20 日.
- ④ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 量子化の幾何 2009, 早稲田大学, 2009 年 9 月 17 日.
- ⑤ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 3<sup>rd</sup> International Conference on Geometry and Quantization, the University of Luxembourg (Luxembourg), 2009 年 9 月 8 日.
- ⑥ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and

localization of Riemann-Roch numbers,  
微分幾何学セミナー, 大阪市立大学,  
2009年6月10日.

- ⑦ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, Topology from infinite dimensional viewpoint, 鳥取環境大学, 2009年2月25日.
- ⑧ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, 微分幾何学とトポロジーセミナー, 慶応義塾大学, 2009年1月19日.
- ⑨ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, Geometry seminar, National Cheng Kung University (Tainan, Taiwan), 2008年12月30日.
- ⑩ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, Fujisan one-day workshop in Geometry and Topology, National Cheng Kung University (Tainan, Taiwan), 2008年12月26日.
- ⑪ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, Ikuta International Workshop on Symplectic Geometry, 明治大学, 2008年12月11日.
- ⑫ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, 東京幾何セミナー, 東京大学, 2008年12月10日.
- ⑬ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, 日本数学会 2008年度秋季総合分科会・幾何学分科会, 東京工業大学, 2008年9月25日.
- ⑭ 吉田尚彦, Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers, ポスター発表, New Horizons in Toric Topology, University of Manchester (Manchester, UK), 2008年7月8日~11日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.meiji.ac.jp/~takahiko/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉田 尚彦 (YOSHIDA TAKAHIKO)

明治大学・研究・知財戦略機構・研究員

研究者番号: 70451903