様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 20 日現在

機関番号：12605
研究種目：若手研究 (B)
研究期間： 2008 ～ 2010
課題番号：20740030
研究課題名（和文） 表現のモジュライ空間とねじれアレキサンダー不変量に関する研究
研究課題名（英文） A study on the moduli space of representations and the twisted Alexander invariant
研究代表者
森藤 孝之（MORIFUJI TAKAYUKI）
東京農工大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号：90334466

研究成果の概要（和文）：本研究は，基本群の SL(2,C)表現のモジュライ空間上の関数としてのねじれアレキサンダー不変量の基本的性質を明らかにし，3 次元多様体の幾何的情報を組織的に導き出す枠組みを与えることを目標としている．当該研究期間に得られた研究成果の概要は以下の通りである．
① ツイスト結び目の一般化である結び目の無限系列に対して，ねじれアレキサンダー不変量とモジュライ空間の定義方程式の次数に関する明示公式を与えた．応用として，この系列の結び目がファイバーである必要十分条件をある種の有限性定理として記述した．
② トーラス結び目のねじれアレキサンダー不変量の明示公式を記述し，モジュライ空間上の関数としての特徴付けを与えた．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research was to clarify fundamental properties of the twisted Alexander invariant (TAI) as a function on the moduli space of SL(2,C)-representations of the fundamental group and to give a framework for deriving geometric information of 3-manifolds from the TAI. The results are as follows.
① We gave explicit formulas of degrees of the TAI and the defining equation of the moduli space for an infinite sequence of knots which is a generalization of twist knots. As an application, we described a necessary and sufficient condition that these knots are fibered as a kind of finiteness theorems.
② For torus knots, we gave an explicit formula and a characterization of the TAI as a function on the moduli space of SL(2,C)-representations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008　年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009　年度	700,000	210,000	910,000
2010　年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：表現空間，モジュライ空間，アレキサンダー不変量，結び目のファイバー性

１．研究開始当初の背景

ねじれアレキサンダー不変量は，結び目群の場合，X. S. Lin によって，一般の有限表示群の場合は和田昌昭によって導入された．そ

の後 Jiang-Wang，Kirk-Livingston，Friedl-Kim らの包括的な仕事を経て，ここ数年の間に応用面で著しく進展した．現在では，アレキサンダー多項式では捉えることのできなかった種々の幾何学的情報を，ねじれアレキサンダー不変量を用いて引き出すことに成功している．

しかしながら，これらの多くの結果は，基本群の表現を一つ固定した上でねじれアレキサンダー不変量を考察し，その幾何的性質をもち得る必要条件を与えるものになっている．そこで，ねじれアレキサンダー不変量からより緻密な幾何学的情報を引き出すために，単一の表現のみを考えるのではなく，表現の族に対応したねじれアレキサンダー不変量を考えることは自然である．

２．研究の目的

本研究の目的は基本群の SL(2,C)表現空間あるいは表現のモジュライ空間上の関数としてのねじれアレキサンダー不変量の基本的性質を明らかにし，3 次元多様体の幾何学的情報を組織的に導き出す枠組みを与えることである．より具体的には，大別して次の二点

(1) 表現空間あるいは表現のモジュライ空間上の関数としてのねじれアレキサンダー不変量の明示公式

(2) 得られた関数の性質と3次元多様体の幾何学的性質の関係

を明らかにすることを目標とする．

３．研究の方法

研究の目的で述べた二つの研究目標(1)，(2)のうち，(2)は(1)の結果に大きく依存している．そこで，一般的設定のもとで両者の考察を始めるのではなく，本研究課題で掲げる枠組みの見通しをよくするため，ある程度一般性をもった性質のよい結び目のクラスに対して(1)および(2)の研究を推進する．その様子を詳細に解析した後に，一般の結び目外部空間，そして有理ホモロジー円周へと，扱う対象を順次拡大していくという基本方針で研究を効果的に進める．

４．研究成果

以下，当該研究期間内に得られた研究成果を年度別に報告する．

(1) 2008 年度．ツイスト結び目（図１参照）と呼ばれている比較的性質の良い結び目の無限系列について，結び目群の SL(2,C)表現のモジュライ空間の情報から，ツイスト結び目のファイバー性を完全に決定することができるかを詳細に考察した．以下，得られた結果について具体的に述べる．

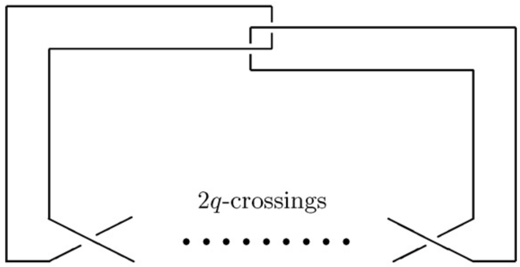

図１　ツイスト結び目 K = J(2,2q)

まず，ねじれアレキサンダー不変量がモニック多項式（最高次係数が 1）となる結び目群の SL(2,C) 表現をモニック表現という．このとき，ツイスト結び目がファイバー結び目でなければ，その結び目群のモニック表現の同値類の個数が有限個であることを示した．

一方，表現空間の次元が正の任意のファイバー結び目は，無限個のモニック表現を持つことが知られているので，ツイスト結び目については表現のモジュライ空間の情報から，結び目のファイバー性を決定できたことになる．

上記結果は，ねじれアレキサンダー不変量の明示公式を利用することで得られており，モニック表現の具体的な個数を評価することも可能である．実際，次の公式が得られた．

ツイスト結び目 K = J(2,2q)（q は整数）の任意の SL(2,C)表現 ρ に対して，

$$\triangle_{K,\rho}(t) = \alpha\beta\, t^2 + (s^{1/2} + s^{-1/2})/2 \ \times \{\alpha + \beta - 2\alpha\beta + (u - v)(\alpha - \beta)/(2 + u + v)\}\, t + \alpha\beta$$

が成り立つ．ただし u と v は結び目群の表示に現れる関係子に対応した行列の固有値を表し（uv = 1 をみたす），α と β はそれぞれ

$$\alpha = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^{q-1}$$
$$\beta = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{q-1}$$

で与えられる複素数を表す．また，s は表現空間を記述するパラメータの一つである．

より一般の結び目群についても，表現のモジュライ空間の幾何的性質を詳しく調べることによって，同様の結果が得られることが期待される．

(2) 2009年度．ツイスト結び目を含む，より広範な結び目のクラスについて，それらの結び目（図2参照）のファイバー性を完全に決定できるかを考察した．これは前年度得られた

ツイスト結び目に対する結果の自然な一般化となっているものである．

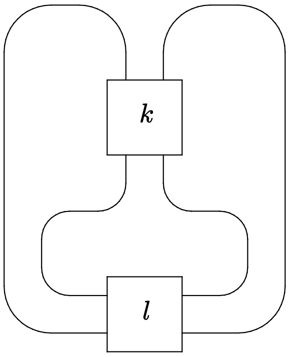

図2　結び目 $K = J(k,l)$

実際，ツイスト結び目を真部分集合として含むある種の結び目の無限系列 $K = J(k,l)$に対して（k は自然数，l は偶数を表す．$k = 2$ がツイスト結び目に対応することに注意），そのファイバー性がモニック表現の有限性で判定できることを示した．

上記結果はねじれアレキサンダー不変量の最高次係数関数と表現のモジュライ空間の定義方程式の次数を具体的に記述することで得られており，その個数の上からの評価を与えることにも成功した．

ここで，ねじれアレキサンダー不変量の最高次係数関数 $F_{k,q}(s,y)$および表現のモジュライ空間の定義方程式 $G_{k,q}(s,y)$の次数は次で与えられる．

$\deg F_{k,q}(s,y) =$

- $(k+1)|q|-(k+4)/2$ (k は偶数)
- 0 ($k = 1$，$q > 0$)
- $(k-3)/2$ (k は 1 でない奇数，$q > 0$)
- $(k-1)/2$ (k は奇数，$q < 0$)

$\deg G_{k,q}(s,y) =$

- $(k+1)q-1$ ($q > 0$，k は 1 でない整数)
- $(k+1)|q|$ ($q < 0$)
- 0 ($k = 1$，$q > 0$)

ただし，$l = 2q$（q は整数）とおいた．

より一般の結び目（例えば 2 橋結び目等）についても，表現のモジュライ空間の幾何学的性質を利用することで，同様の結果が得られることが期待される．

(3) 2010年度．トーラス結び目と呼ばれている対称性の高い結び目のクラスについて，それらのねじれアレキサンダー不変量を詳しく考察した．以下，得られた結果について具体的に述べる．

一般に，ねじれアレキサンダー不変量の各係数は，結び目群のSL(2,C)表現空間上の有理関数として表される．また，ねじれアレキサンダー不変量の変数 t を1とおいて特殊化すると，結び目外部空間のライデマイスタートーションが得られる．このとき表現空間上の複素数値関数を一つ定めたことに注意する．結び目外部空間にザイフェルト多様体の構造が入る場合には，この複素数値関数が定数関数となることが知られている．本研究では，トーラス結び目の場合に，ねじれアレキサンダー不変量の変数を特殊化する前の段階において，各係数自身が定数関数となっていることを示した．

上記結果は，ねじれアレキサンダー不変量の明示式を具体的に記述することで得られている．その直接の系として，Silver-Williamsによって得られていたトーラス結び目のねじれアレキサンダー不変量に関する定理の反例を構成することに成功した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Teruaki, Kitano, Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials for irreducible SL(2,C)-representations of torus knots, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze, 査読有, 印刷中

② Takayuki Morifuji, Meyer's function and the word metric on the hyperelliptic mapping class group, Comptes Rendus Mathematiques de l'Academie des Sciences, La Societe Royale du Canada, 査読有, 31 巻, 2009, 115－117

③ Takayuki Morifuji, On a secondary invariant of the hyperelliptic mapping class group, Banach Center Publications, Algebraic Topology－Old and New, M. M. Postnikov Memorial Conference 査読有, 85 巻, 2009, 83－92

④ Takayuki Morifuji, Masaaki Suzuki, Representations of the braid group and punctured torus bundles, Kyungpook Mathematical Journal, 査読有, 49 巻, 2009, 7－14

⑤ Teruaki Kitano, Takayuki Morifuji, L^2-torsion invariants and the Magnus representation of the mapping class group, Advanced Studies in Pure Mathematics, Groups of Diffeomorphisms, in honor of Shigeyuki Morita on the occasion of his 60th birthday, 査読有, 52 巻, 2008, 31－49

⑥ Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials of twist knots for nonabelian representations, Bulletin des Sciences Mathematiques, 査読有, 132 巻, 2008, 439—453

〔学会発表〕（計 3 件）
① Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials of torus knots, The 7th East Asian School of Knots and Related Topics, 2011 年 1 月 11 日, 広島大学
② 森藤 孝之, ツイスト結び目のねじれ Alexander 多項式, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会トポロジー分科会, 2009 年 9 月 24 日, 大阪大学
③ Takayuki Morifuji, On the first MMM class of surface bundles over the circle, International Workshop on Noncommutative Geometry and Physics 2009, 2009 年 2 月 19 日, 慶應義塾大学

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
森藤 孝之（MORIFUJI TAKAYUKI）
東京農工大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号：90334466

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者 なし