

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 1 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20740031

研究課題名（和文）写像類群における不変量の間関係について

研究課題名（英文）On the relation between invariants of the mapping class groups

研究代表者

金 英子 (KIN EIKO)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・講師

研究者番号：80378554

研究成果の概要（和文）：曲面の写像類群の元である擬アノソフ写像類は、エントロピーという不変量をもつ。種数 g の n 個の穴あき曲面の最小エントロピーを $L(g,n)$ とおく。 $g>1$ に対して $L(g,n)$ のオーダーは $\log(n)/n$ であることが Tsai によって示されている。これより n と $L(g,n)$ の積を $\log(n)$ で割った量 $c(g,n)=n \cdot L(g,n)/\log(n)$ は、 n に依存しないある定数で上から押さえられる。本研究では、無限個の g について $c(g,n)$ は上から 2 で押さえられることを証明し、小さなエントロピーを持つ擬アノソフの無限個の新しい例を発見した。

研究成果の概要（英文）：Let $L(g,n)$ be the minimal entropy of pseudo-Anosovs defined on an orientable surface of genus g with n punctures. Tsai proved that for any fixed $g > 1$, $L(g,n)$ is on the order of $\log(n)/n$. Thus in particular, the number $c(g,n):=n \cdot L(g,n)/\log(n)$ is bounded by a constant from above, which does not depend on n .

We found a new family of pseudo-Anosovs with small entropy, defined on orientable surface of genus g with n punctures for each $g>1$ and for infinitely many n 's. By using these examples, we proved that for infinitely many g 's, the number $c(g,n)$ is bounded by 2.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：写像類群, 擬アノソフ, dilatation, エントロピー, 3次元双曲多様体, 双曲体積,

1. 研究開始当初の背景.

曲面の写像類群の元、すなわち写像類は、擬アノソフ型、周期型、可約型つのタイプに分類できる。この中で最も一般的であるのは擬アノソフである。擬アノソフ写像類 f の不変量としてエントロピーとよばれる量がある。これを $\text{ent}(f)$ と表す。曲面 S を固定すると、 S 上の擬アノソフのエントロピー全体には最

小値 $L(S)$ が存在することが知られている。種数 g の n 個の穴あき曲面 $S(g,n)$ に対する最小エントロピーを $L(g,n)$ とおくと「 $L(g,n)$ を求めよ。 $L(g,n)$ を実現する写像類を挙げよ」という自然な問題が考えられる。この問題は一般に非常に難しく、(トポロジーが簡単な曲面を除く)ほとんどの曲面について解決されていない。

一方、写像類が擬アノソフである必要十分条件は、その写像トラスが有限体積の完備双曲構造をもつ3次元多様体であることである。従って写像トラスの双曲体積は、擬アノソフ写像類 f の不変量である。これを $\text{vol}(f)$ と表す。曲面 S を固定すると、 S 上の擬アノソフ写像類全体がなす体積の集合には最小値 $\text{vol}(S)$ が存在することが知られている。最小値 $\text{vol}(S)$ の値を求めよ、という問題もまた興味深いが、特別な曲面を除き、その最小値は決定されていない。本研究の目的は、擬アノソフ写像類の不変量の相互関係を明らかにすることであった。特に擬アノソフ写像類のある種の複雑さを測っているエントロピーと体積という2つの不変量の間関係を調べることであった。基本的な、この2つの不変量の間関係や性質が理解できれば、写像類群の新しい性質、構造が明らかになることが期待される。2つの最小値 $L(S)$ や $\text{vol}(S)$ を決定する問題の手がかりになるだろう。

ここで2つの不変量の比 $r(f) = \text{ent}(f)/\text{vol}(f)$ を考える。金・小島・高沢は次を示している：

「曲面 S を固定すると、 S 上の擬アノソフ写像類 f のエントロピーと体積の比 $r(f)$ は曲面 S のみに依存する定数で下から押さえられる。この比がいくらでも大きくなる擬アノソフ写像の無限列が存在する。」

従ってエントロピーと体積の比を上から定数で押さえることはできないことに注意しておく。上の結果から、エントロピーと体積という不変量の間には、上記の性質以外にも、興味深い性質があると予想される。例えば高沢の計算機実験の結果をみると、曲面 S 上の擬アノソフ全体の中で小さなエントロピーをもつ写像類は小さな体積を持ち、またその逆、つまり小さな体積をもつ写像類は小さなエントロピーを持っていることが観察できる。

2. 研究の目的.

M を3次元双曲ファイバー多様体とする。このとき、 M の各 fibration のモノドロミーは擬アノソフであることが Thurston によって示されている。従って、 M の fibration ごとに(擬アノソフの)エントロピーが定まる。さらに Thurston は、自身が導入した Thurston norm を用いることによって、 M の第2ベッチ数が2以上ならば、ファイバーのとトポロジーがいくらでも複雑になるような、fibration の族が存在することを示した。従って、このような多様体 M から擬アノソフ写像類の族が得られる。(つまり、このような擬アノソフ写像類の写像トラスは M と同相。) M からこのようにして定まる写像類のエントロピーの集合を、 M のエントロピースペクトラムとよぶ。エント

ロピースペクトラムは3次元双曲ファイバー多様体の不変量だが、これはどれくらい強い不変量なのか? エントロピースペクトラムは(点の分布に関して)どのような性質を持つか? などの問題が考えられる。これまでの研究では、擬アノソフの最小エントロピーを決定する問題において、エントロピースペクトラムに注目した研究は存在しなかった。

本研究を開始した時点では、具体的な多様体のエントロピースペクトラムを詳細に調べた先行研究もなかった。本研究では、3次元双曲ファイバー多様体の族について、そのエントロピースペクトラムを具体的に計算する。小さな体積を持つ、3次元双曲ファイバー多様体の族を選び、そのエントロピースペクトラムを考察することによって、擬アノソフの最小エントロピーを決定することを目標にする。また、いくつかの曲面族の最小エントロピーの漸近的挙動に関する結果を得ることも目標にする。

3. 研究の方法. まず、多様体 M のエントロピースペクトラムをどのように計算するか、が問題になる。つまり与えられた多様体 M と、写像トラスが同相となるような擬アノソフ写像のエントロピーをどうやって求めるか? ということが問題になる。一般に、このような擬アノソフ写像の個数は無限であるから、組織的にエントロピーを計算できなければならない。この問題については McMullen が既に解決している。McMullen は、ファイバー多様体 M の fibered face 上に定まるタイヒミュラー多項式を導入し、この(1つの)多項式から、fibered face に付随する M の各 fibration のエントロピーが計算できることを示している。従って M のタイヒミュラー多項式を求めることによって、エントロピースペクトラムを組織的に計算できる。

マジック多様体とよばれる3次元双曲ファイバー多様体がある。この多様体は、ある3成分絡み目の補空間と同相である。この多様体は、3つのカスプを持つ向き付け可能な双曲多様体の中で、最小体積を持つことが予想されている。Gabai-Meyerhoff-Milley の結果によると、カスプが2個以下の3次元双曲多様体の中で、体積がある定数以下のものはマジック多様体の3つのカスプのいくつか(あるいは全部)を Dehn filling することによって得られる。言い換えると、マジック多様体のエントロピースペクトラムを制限することによって、カスプが2個以下の、小さな体積を持つ興味深い多様体のエントロピースペクトラムが得られることになる。また、Dehn filling する境界スロープを変えることによって、2個以下のカスプをもつ、無限個のファイバー双曲多様体のエントロピー

スペクトラムがマジック多様体から得られる。つまり、マジック多様体は、エントロピースペクトラムが実際に計算できる、興味深い多様体の豊富な(無限個の)例を手供する。本研究では、マジック多様体のタイヒミュラー多項式を計算し、そのエントロピースペクトラムについて考察する。

4. 研究成果.

種数 g の n 個の穴あき曲面 $S = S(g, n)$ に対する最小エントロピーを $L(g, n)$ とおく。たんに $L(S)$ と表すこともある。 $n=0$ の場合、 $L(g, 0)$ を $L(g)$ とおく。すなわち $L(g)$ は種数 g の閉曲面上の擬アノソフの最小エントロピーである。本研究では、適当な曲面の族 $\{S_n\}$ に対する最小エントロピー $L(S_n)$ の漸近的挙動についての結果 (1), (2) と同じエントロピースペクトラムを持つ多様体に関する結果 (3) を得た。

(1) (閉曲面の族の場合) Penner によって、 $L(g)$ は $1/g$ と同じオーダーであることが示されている。これより特に g と $L(g)$ の積 $g \cdot L(g)$ は g に依存しないある定数で上から押さえることができる。 Eriko Hironaka は、ある 2 成分絡み目補空間のエントロピースペクトラムを考察した。彼女は $g \cdot L(g)$ は 1 点穴あきトーラス上のアノソフの最小エントロピー $L(1, 1)$ という定数で、上から押さえられることを示した。この上からの評価は、Penner による評価の改良になっている。 Hironaka が考察した 2 成分絡み目補空間は、マジック多様体の 1 つのカusp を Dehn filling することによって得られる。そこで本研究では、マジック多様体の 1 つのカusp を Dehn filling して得られる(無限個の)ファイバー双曲多様体のエントロピースペクトラムを組織的に調べることにした。この本研究によって、マジック多様体の fibration のモノドロミーから得られる擬アノソフ全体の中では $g \cdot L(g)$ の上からの評価は、Hironaka による上からの評価が最良であることがわかった。残念ながら、 $g \cdot L(g)$ の既存の上からの評価を改良することはできなかったが、小さなエントロピーを持つ新しい擬アノソフの族を発見することが出来た。特に、種数 7 の閉曲面上の orientable stable foliation をもつ擬アノソフ写像の最小エントロピーを決定することが出来た。さらに最小エントロピー $L(g)$ の上からの新しい評価を与えることに成功した。種数 g に関するある条件のもとでは、我々の評価は、Hironaka が与えた $L(g)$ の上からの評価の改良になっている。(この研究は高沢光彦氏との共同研究であるが、我々とほぼ同時期に Aaber-Dunfield もまた、我々とほぼ同様の結果を得ていること

に注意しておく。)

(2) (種数を固定した穴あき曲面の族) 2010 年、Tsai は $g > 1$ に対して $L(g, n)$ のオーダーは $\log(n)/n$ であることを示した。これより特に、 n と $L(g, n)$ の積を $\log(n)$ で割った量 $c(g, n) := n \cdot L(g, n) / \log(n)$ は n に依存しないある定数で上から押さえられる。これは $g=0, 1$ の場合と対照的な結果である。($g=0, 1$ の場合は、 $L(g, n)$ のオーダーは $1/n$ であることが知られている。) 証明の中で、Tsai は g に対してエントロピーのオーダーが $\log n/n$ となるような、 $S(g, n)$ 上の擬アノソフ $f(g, n)$ の列を構成している。これまでの研究では、Tsai の例よりも小さいエントロピーを持つ擬アノソフの族は知られていなかったが、本研究(高沢光彦氏との共同研究)によって、無限個のある g と任意の n に対して、Tsai の例 $f(g, n)$ よりもエントロピーが小さい擬アノソフが存在することがわかった。詳しく述べよう。Tsai の例を用いると $c(g, n)$ は上から $2(2g+1)$ で押さえられる。一方、我々の例を用いると $c(g, n)$ を上から 2 で押さえられることができる。本研究の例から得られる写像トーラスは、マジック多様体と同相、又は、マジック多様体のあるファイバーの境界スローブにそって Dehn filling して得られるファイバー多様体と同相である。すなわち我々の(無限個の)例は、マジック多様体から得られる。

(3) 同じエントロピースペクトラムを持つ、多様体のペア (M_1, M_2) が存在することを示した。このようなペアは無限個存在することもわかる。ここに現れる多様体は全て、マジック多様体の 1 つのカusp を Dehn filling することで得られる。同相な多様体のエントロピースペクトラムは明らかに同じであるが、上記の多様体のペアは、一般に異なる双曲体積を持つので、同相ではない。エントロピースペクトラムが同じ多様体の間には、どのような関係があるのか? という自然な問題が考えられるがそれについては現在研究を進めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Eiko Kin and Mitsuhiro Takasawa, Pseudo-Anosovs on closed surfaces having small entropy and the Whitehead sister link exterior, Journal of the Mathematical Society of Japan (2012), 査読有り.

② Eiko Kin and Mitsuhiro Takasawa, Pseudo-Anosov braids with small entropy and the magic 3-manifold, Communications in Analysis and Geometry 19, volume 4 (2011), 705-758, 査読有り.

③ Eiko Kin, Sadayoshi Kojima and Mitsuhiro Takasawa, Entropy versus volume for pseudo-Anosovs, Experimental Mathematics 18 (2009), 397-407, 査読有り.

④ Eiko Kin and Mitsuhiro Takasawa, An asymptotic behavior of the dilatation for a family of pseudo-Anosov braids, Kodai Mathematical Journal 31 (2008) 92-112, 査読有り.

⑤ Eiko Kin, The forcing partial order on a family of braids forced by pseudo-Anosov 3-braids, Osaka Journal of Mathematics 45 (2008) 757-772, 査読有り.

[学会発表] (計 5 件)

① 金 英子, Pseudo-Anosovs with small entropy and the entropy equivalence on fibered 3-manifolds, RIMS 研究集会: Frontiers in Dynamical systems and Topology, 京都大学, 2011年11月21日.

② 金 英子, Pseudo-Anosovs on closed surfaces having small entropy and the Whitehead sister link exterior, The 7th East Asian School and Knots and Related topics, 広島大学, 2011年1月11日.

③ 金 英子, Bounds of the minimal dilatation for pseudo-Anosovs and the magic 3-manifold, Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学数理解析研究所, 2010年6月4日.

④ 金 英子, Pseudo-Anosovs with small dilatation and the Dehn fillings of the magic manifold, Workshop on Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, Institute for Mathematical Sciences, NUS, Singapore, 2010年7月19日.

⑤ 金 英子, 擬アノソフ写像類のエントロピーと体積, 及びそれらの関係について, トポロジーシンポジウム, 金沢市文化ホール, 2008年8月7日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.is.titech.ac.jp/~kin/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金 英子 (KIN EIKO)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・
講師

研究者番号: 80378554

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: