

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20740035

研究課題名（和文）

結び目不変量の射影図による評価とその幾何学的意味

研究課題名（英文）

Estimates of knot invariants via diagrams and geometrical sence of them

研究代表者

川村 友美 (KAWAMURA TOMOMI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：40348462

研究成果の概要（和文）：

結び目をほどくのに必要な交差交換（交差の上下を変える操作）の最小回数を決める公式はまだ見つかっていない。本研究ではその最小回数について、結び目の図から推測される値の範囲を従来より精密な形で与えた。本質的には、4次種数、ラスムッセン不変量、オジュバットとサポーの不変量と呼ばれる結び目不変量、すなわち結び目の複雑さをそれぞれある規則によって数値化したものを評価している。

研究成果の概要（英文）：

We have never found any formula to determine the minimum number of crossing changes needed to unknot any given knot. In this research, we estimate this minimum number via a diagram of the knot, more strictly than known results. Essentially, we estimate the four-genus, the Rasmussen invariant, and Ozsvath and Szabo's invariant.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何，結び目理論

1. 研究開始当初の背景

結び目理論は幾何学の一分野であり、多様体の分類との関連などに注目されて発展し、近年では物理学、化学、生物学への応用に大きな可能性を持っている。その中で結び目不変量は、結び目の分類の手段として数多く構成され研究がなされてきた。しかし、例えば定義が容易であっても一般的に決定するのが困難なものが多い。例えば結び目解消数という不変量は、交差の上下を何回交換すればほ

どけるかというものであるが、一般的な決定方法は見つかっていない。

その試行の一例として、結び目を4次元多様体内での2次元部分多様体と3次球面の横断的交差として捉える方法が以前より行われてきた。特に1990年代にゲージ理論やサイバーグ-ウィッテン理論によって大きく発展した。本質的には4次種数やスライスオイラー数という結び目または絡み目の4次元トポロジー的不変量がこれらの理論によって

決定あるいは評価されたのである。

2000年以降はこれらの理論に対し結び目フレアーホモロジー理論やコバノフホモロジー理論によってより組み合わせ的な考察が与えられた。その中で新たにオジュバットとザボアの結び目不変量やラスムッセン不変量が構成され、上記の4次元トポロジー的不変量の評価の多くが本質的にはこれらの新しい不変量の評価式となっていることが明らかになった。

川村自身は以上の議論において本質的に与えられていた各種の結び目不変量評価について分析と改良を始めていた。本研究はそれを引き継ぐ形で開始されたものである。

2. 研究の目的

各種の結び目不変量を結び目射影図から得られる情報により直接評価する方法について、既知の評価式の幾何学的意味を分析することで精度を高めるとともに、新たな不変量評価式を構成する、というのが当初の目的であった。

3. 研究の方法

研究資料となる文献の収集や研究打合せを積極的に行うことで、これまでの国内外の関連研究を入念に調査し、各結び目不変量評価式の誤差の幾何学的意味を分析することで、評価式の精密化を図った。文献は書籍購入の他にインターネットを利用することで多く集まった。打合せは軽微なものはインターネットを利用したが、詳細に踏み込んだ議論は、訪問または招聘を実施したり研究集会などの空き時間を利用したりして直接対面することで行った。また、口頭発表も複数回行い、その反応によって研究方針の修正も行った。

不本意ながら国外での研究発表や研究打合せは実現しなかったが、幸いにも研究期間中に国内で国際会議およびそれに合わせたワークショップやセミナーが何度か行われ、それらに参加することで国外の研究者との対面の機会に恵まれ、対面が叶わなかった研究者ともインターネットを利用した連絡や資料送付を行うことで、国外活動の不足を補った。

4. 研究成果

(1) 研究の主な成果

ラスムッセン不変量は当初は結び目不変量として構成され、後に複数の研究者が

紐の個数が複数である絡み目へと定義を拡張した。本研究はとくにベリアコワとヴェルリによって定義された絡み目不変量について主に研究した。以下彼らの不変量のことを「ラスムッセン不変量」と呼ぶ。

ここで重要となるのは絡み目の向きとその射影図における交差の扱いである。上になる部分が左から右へ向かっている下をくぐる形になっている交差を「正」、その逆である交差を「負」とする。交差すべてが正となる射影図で表される結び目や絡み目（以下、正の結び目や正の絡み目と呼ぶ）についてここで挙げてきた不変量は、その射影図の交差数とザイフェルト円周の数（大まかに言えば図に現れる「うず」の合計数）で決まることが既に知られていた。そういう状況下で研究を遂行し、以下の成果を得た。

① ラスムッセンの絡み目不変量のベネカン型評価式の精密化。

結び目のラスムッセン不変量についてプラメネフスカヤやシュマコヴィッチによって示されていた「ベネカン不等式」に似た評価式を改良したものである。結び目および分離できない絡み目について不変量の下からの評価を、正および負の交差数やザイフェルト円周の数に加えて、「含んでいる」正の絡み目の分離成分数によって与えた。なお、結び目や絡み目が正のときは不等式の等号が成立する。じつは本研究開始前より大まかな結果は得ていたのだが、とくに本研究開始後にその議論を改善した。具体的には、与えられた絡み目射影図に対して適当な正の絡み目とのコボルディズム（二つの絡み目を繋ぐ4次元空間内の曲面）を構成していくのだが、その曲面をより「短いもの」にした。

② オジュバットとザボアの結び目不変量のベネカン型評価式の精密化。

オジュバットとザボアの結び目不変量についてリヴィンストンが示したベネカン型評価式を改良したもので、①とほぼ同じ議論で得られる類似結果である。ただし、結び目についてのみの議論を基にしているために、結び目同士のコボルディズムを構成しなければならない点①との大きな相違点である。

③ 負の絡み目のラスムッセン不変量の決定公式。

交差がすべて負となる射影図で表される絡み目についてラスムッセン不変量を決定したもので、①の応用例として得られた結果である。結び目に対してはラ

スムッセン不変量の鏡像についての歪対称性により正の結び目から決まるのであるが、一般の絡み目については自明なものですらその歪対称性の反例になっているため別の議論が必要であった。実際には、与えられた絡み目と適切な負の結び目のコボルディズムを構成する簡単な議論で済んだ。得られた負の絡み目についての不変量決定公式は、分離成分数も要求している点が正の絡み目の場合と大きく異なっている。

以上の結果は同時に結び目解消数やスライスオイラー数についてのベネカン不等式の精密化を与えている。系としても得られるが、同様の証明の議論を直接スライスオイラー数について適用することも可能である。

(2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト。

本研究開始当時国内では、絡み目ホモロジー理論について関心度は高かったものの、関連した実績のある研究者は大変少なかった。年々増えてきたがまだ「多い」とは言い難い。一方国外では、とくに絡み目ホモロジー理論発祥の米国にて若手も巻き込んだ研究が当時から現在に至るまで盛んにされて、多くの継承者も育っている。

①について。

結果そのものについては同時期にロブが独立して、不変量の基盤であるリー版コバノフホモロジーを考察する方法によって示している。彼の論文が先に出版されたため、こちらの公表は口頭発表でとどめ、その良い応用例を自身で得るまで論文発表を控えていた経緯があるが、成果③を得たのを受け論文を再校正中である。このように競争が発生するほど注目度の高いテーマであり、この成果は安部による等質結び目のラスムッセン不変量決定公式のきっかけにもなっている。ここで「等質」という性質を満たす結び目には、よく研究がされているトーラス結び目も含まれている。

また川村の先行研究結果は、市原とジョンによる 3 次元多様体の分類に応用され、さらに改良されたこの結果も同様の応用が期待されている。

②について。

未確認であるが、この不変量も絡み目への定義の拡張がされ、それが完成すればこの成果も同様に拡張されることが見込まれている。なお、公表されていないようで

あるが、リヴィンストンも独立して同じ結果を得たそうだが、メールでの議論により、こちらの証明の方が効率の良い議論であることがわかった。こちらでも競争になるほど注目度の高いテーマである。ただし不変量の定義がまだ結び目に限られている時点ではそれが議論の難しさとなっているためか、①ほどは組合せ的な議論が進んでいない印象である。

③について。

この結果を得る前にパートンが、リー版コバノフホモロジーの構成を少し変えて、鏡像について（歪）対称であるホモロジー不変量を新たに構成していた。当面は彼の結果の陰に隠れることになりそうであるが、こちらの研究では鏡像についての歪対称性に固執しなかったおかげで、この不変量が一般の絡み目の複雑さの指標として重要であること、その一因が分離成分数にあることが確認された点は評価されるべきと確信している。なお、この結果の証明方法は安部の等質結び目についての議論と類似している。

(3) 今後の展望。

各種不変量の評価に関しては、まだ一般の絡み目についての不変量決定には至っていない原因の分析についての多くの課題とヒントがこの成果から与えられた形となった。不等式の両辺間の差、歪対称性とのズレなどの幾何学的な意味の解決が、不変量決定公式への足掛かりとなりそうである。

また、3次元多様体や4次元多様体の研究への応用も上で触れた例以外でもなされることを期待している。じつはもとのベネカン不等式は3次元多様体の接触幾何構造から得られた背景があるため、本研究開始当初は接触幾何や特異点論との関連をより明らかにすることも予定していた。想定以上に困難だったため研究期間中に成果を挙げることはかなわなかった。その間にクロンハイマーとムロウカがゲージ理論によるコバノフホモロジー理論の再構築を発表した。ますます注目度が高く議論が複雑な発展が予想される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 3 件)

① 川村友美、絡み目の整数値不変量のベネ

カン不等式の精密化、研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」、2012年1月20日、鹿児島大学

- ② Tomomi Kawamura, An estimate of the Rasmussen invariant for links, Knots, Contact Geometry and Floer Homology Tambara workshop, 2010年5月29日、東京大学玉原国際セミナーハウス
- ③ 川村友美, 絡み目のラスムッセン不変量のベネカン不等式に類似した評価式、日本数学会 2009年度秋季総合分科会トポロジー分科会、2009年9月24日、大阪大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川村 友美 (KAWAMURA TOMOMI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授
研究者番号：40348462

(2) 研究分担者

該当者なし

(3) 連携研究者

該当者なし