様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月２３日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008～2010
課題番号：２０７４００３６
研究課題名（和文）　確率測度の空間の幾何学とその応用

研究課題名（英文）　Geometry of the space of probability measures and its applications

研究代表者
太田　慎一（OHTA　SHIN-ICHI）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：００３７２５５８

研究成果の概要（和文）：距離空間上の確率測度のなす空間に自然な距離を入れたものである Wasserstein 空間の幾何学について研究した．成果の１つとして，高い特異性を持ち得る空間（アレクサンドロフ空間）上の Wasserstein 空間の幾何構造を調べ，そこでの勾配流の理論を構築した．また，Wasserstein 空間上のある種のエントロピーの凸性は空間の曲がり方と密接に関係することが知られていたが，この関係をより一般の空間（フィンスラー多様体）に拡張した．

研究成果の概要（英文）：We studied the geometry of Wasserstein spaces, which are the metric spaces consisting of probability measures on metric spaces. One of our achievements is the investigation of the geometric structure of the Wasserstein space over a possibly highly singular space (an Alexandrov space), and the establishment of the theory of gradient flows in such a space. We also generalized the known equivalence between the convexity of a certain entropy on the Wasserstein space and a curvature bound of the underlying space to a wider class of spaces (Finsler manifolds).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：曲率，リーマン幾何学，フィンスラー幾何学，最適輸送理論，熱流

１．研究開始当初の背景

距離空間 X に対し，その上のボレル確率測度全体のなす空間 P(X)に X の距離構造から定まる自然な距離空間としての構造を入れたものを Wasserstein 空間とよび，以下では単に P(X)で表す．Wasserstein 距離は最適輸送理論では２つの確率測度の間の最小輸送コストと解釈される．

ユークリッド空間やリーマン多様体上の Wasserstein 空間でのエントロピーの振る舞いについての McCann らの先駆的な業績の後，2005 年頃から von Renesse, Sturm, Lott, Villani は徐々に一般的な状況で，完備リーマン多様体 M に対し，P(M)上のある種のエントロピーの凸性（以下では曲率次元条件と呼

ぶ）がＭのリッチ曲率が下から（かつ次元が上から）押さえられていることと同値であることを示した．そしてこの曲率次元条件を，多様体とは限らない一般の測度距離空間に対してもリッチ曲率の下限に対応する条件として導入し，それを満たす空間がリッチ曲率を押さえられたリーマン多様体と共通の幾何的・解析的性質をもつこと，曲率次元条件が測度距離空間の列の測度つきGromov-Hausdorff 収束で保たれることなどの基本的な性質を明らかにした．

また，Jordan-Kinderlehrer-Otto や Otto-Villani の 2000 年前後の業績により，X 上のある種の発展方程式の解は，対応する P(X)上の汎関数の勾配流と見なすことができ，その汎関数の性質を調べることで X 上の関数不等式などへの応用があることが知られていた．代表的な例は相対エントロピーの勾配流（の密度関数）が熱流を与えることであり，これは相対エントロピーの凸性を通して上述の曲率次元条件や対数ソボレフ不等式などと関係する．

２．研究の目的

本研究の目的は，距離空間上の確率測度のなす空間である Wasserstein 空間の幾何学の進展と，その距離空間の幾何学や解析学などへの応用であった．Wasserstein 空間や最適輸送理論は元々確率論，偏微分方程式，経済学などに幅広く応用されてきたが，近年その幾何学的側面への関心が高まっており，活発に研究が行われている．その中で本研究に最も関係の深いものは，背景で述べた Lott, Sturm, Villani による測度距離空間のリッチ曲率の下限への取り組み及び応用と，Otto, Ambrosio らによる Wasserstein 空間上の勾配流の理論である．

具体的には，曲率次元条件を満たすリーマン多様体以外の空間の豊富な例を与えることと，Wasserstein 空間の幾何構造を距離空間の幾何の立場から詳細に記述すること，更にそれらの応用を主たる研究目的とした．背景で述べたように曲率次元条件はリーマン多様体の収束で保たれるが，曲率次元条件を満たす空間がそのような極限空間以外にどの程度あるのかは，一般論を展開する上で重要な問いである．また，Wasserstein 空間は無限次元空間であり，その幾何構造を調べるのに通常の多様体の理論は使えない．そこで，距離空間の幾何の理論を幾何構造の理解に役立てたい．

３．研究の方法

曲率次元条件を満たす空間の新たな例の研究では，フィンスラー多様体を考えた．フィンスラー多様体とは，各接空間にノルム（より一般には非対称性を許したミンコフスキノルム）が与えられた多様体であり，特に内積から定まるノルムに限ったのがリーマン多様体である．フィンスラー多様体には自然な距離構造が定まるが，測度は自然なものを１つ決めることはできない．一方，リッチ曲率は定義されていたが，測度を決めることができないため，あまり有用とは言えなかった．そこで，任意の測度に対し重みつきリーマン多様体の理論を参考にして重みつきのリッチ曲率を導入し，このリッチ曲率と測度の関係を調べた．

Wasserstein 空間の勾配流に関する研究では，先行する研究に比べて真に幾何学的な手法を用いた．具体的には，アレクサンドロフ空間の理論を用いて Wasserstein 空間の幾何構造を調べ，勾配流の定式化とその性質の研究につなげた．X 上の Wasserstein 空間 P(X)は，X が非負曲率を持つときアレクサンドロフの意味で非負曲率を持つが，X が非負曲率を持たないときは曲率を下から押さえられないことが知られていた．これを克服するため，バナッハ空間の幾何学を参考にして曲率の下限とは異なる非負曲率の一般化（距離の弱凹性）を導入し，それが Wasserstein 空間で満たされることを用いて P(X)の幾何構造を調べた．

４．研究成果

始めにフィンスラー多様体については，研究方法で述べたリッチ曲率の下限が曲率次元条件と同値であることを示した．これにより，曲率次元条件の一般論から Bishop-Gromov 体積比較定理，Brunn-Minkowski 不等式，対数ソボレフ不等式，大域ポアンカレ不等式，測度の集中などの一連の幾何的・解析的応用が得られる．これに続けて，Sturm（Bonn 大学）と共同でフィンスラー多様体上の自然な非線型熱方程式を研究し，その解の存在や正則性などについての基本的な性質の他，上で述べたリッチ曲率についてのラプラシアンの比較定理などを得た．これらの成果により，この研究で導入したリッチ曲率は自然なものであると言える．

勾配流の研究では，コンパクトアレクサンドロフ空間上の Wasserstein 空間が，それ自身はアレクサンドロフ空間でないにも関わらず，同じ点から出発する２本の測地線の間の角度が考えられるという意味でリーマン構造に似た性質を持つことを示した．更に，この測地線の間の角度を用いて P(X)上の一般の凸関数の勾配流を定式化し，その存在性や収縮性を示した．特にリーマン多様体上では，この方法で構成された相対エントロピー

の勾配流は熱流と一致し，相対エントロピーの凸性（つまり，曲率次元条件）から熱流のWasserstein 距離についての収縮性が得られる．同様の熱流の勾配流としての特徴づけは，フィンスラー多様体でもSturmとの共同研究の中で示された．

Wasserstein 空間の勾配流の理論は近年目覚ましく発展しており，特に上で述べたような発展方程式の解の勾配流としての解釈は様々な空間や方程式に拡張，応用されている．上記のアレクサンドロフ空間，フィンスラー多様体に置ける成果は，その中でも空間の特異性から重要な位置を占めるものである．また，フィンスラー多様体への重みつきリッチ曲率の導入は，フィンスラー幾何の研究へのリーマン幾何的なアプローチを可能にする画期的なものであり，今後も様々な応用が期待できる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）全て査読あり

1. 太田慎一，確率測度の空間の幾何学，数学，第63巻，2011，pp.21-42

2. Shin-ichi Ohta, Vanishing S-curvature of Randers spaces, Differential Geom. Appl., Vol.29, 2011, pp.174-178

3. Shin-ichi Ohta, Karl-Theodor Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, Comm. Pure Appl. Math., Vol.62, 2009, pp.1386-1433

4. Shin-ichi Ohta, Finsler interpolation inequalities, Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol.36, 2009, pp.211-249

5. Shin-ichi Ohta, Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry, Math. Ann., Vol.343, 2009, pp.669-699

6. Shin-ichi Ohta, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, Amer. J. Math., Vol.131, 2009, pp.475-516

7. Shin-ichi Ohta, Markov type of Alexandrov spaces of nonnegative curvature, Mathematika, Vol.55, 2009, pp.177-189

〔学会発表〕（計 14 件）

1. 太田慎一，ミンコフスキ空間の熱流の非収縮性（一般講演），日本数学会 2011 年度年会，2011 年 3 月 22 日，早稲田大学

2. Shin-ichi Ohta, Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces, ERC Workshop on Optimal Transportation and Applications, 2010 年 10 月 12 日，ピサ（イタリア）

3. Shin-ichi Ohta, Displacement convexity of generalized relative entropies, 34^{th} Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010 年 9 月 7 日，大阪

4. Shin-ichi Ohta, Weighted Ricci curvature and heat flow on Finsler manifolds, Workshop on Riemannian and Non-Riemannian Geometry, 2009 年 8 月 8 日，Indianapolis（アメリカ合衆国）

5. Shin-ichi Ohta, Ricci curvature, entropy and optimal transport, Optimal Transportation: Theory and Applications, 2009 年 6 月 22-26 日，Grenoble（フランス）

6. Shin-ichi Ohta, Weighted Ricci curvature of Finsler manifolds, Workshop on Finsler Geometry and its Applications, 2009 年 5 月 26 日，Debrecen（ハンガリー）

7. 太田慎一，フィンスラー多様体のリッチ曲率と最適輸送理論，第 43 回フィンスラー幾何学シンポジウム，2008 年 11 月 6 日，宇都宮

8. 太田慎一，確率測度の空間の幾何学（特別講演），日本数学会 2008 年度秋季総合分科会，2008 年 9 月 26 日，東京工業大学

9. 太田慎一，フィンスラー多様体のリッチ曲率と曲率次元条件，第 55 回幾何学シンポジウム，2008 年 8 月 23 日，弘前大学

10. Shin-ichi Ohta, Optimal transport and Ricci curvature in Finsler geometry, The 1^{st} MSJ-SI: Probabilistic Approach to Geometry, 2008 年 7 月 29 日，京都大学

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/

６．研究組織

(1)研究代表者
　太田　慎一（OHTA SHIN-ICHI）
　京都大学・大学院理学研究科・准教授
　研究者番号：00372558

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし