様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　４月　１日現在

機関番号：14401
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008 ～ 2011
課題番号：20740037
研究課題名（和文）ミラー対称性とブレーン・タイリング

研究課題名（英文）　Mirror symmetry and brane tiling

研究代表者
植田　一石　（Ueda Kazushi）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60432465

研究成果の概要（和文）：任意の 2 次元トーリック弱 Fano スタックに対して、ブレーン・タイリングと呼ばれる組合せ論的な対象を対応させ、これによってこのスタック上の連接層の導来圏を箙の表現を用いて記述することができた。また、Brieskorn-Pham 特異点と呼ばれる基本的な特異点に対するホモロジー的ミラー予想を証明した。さらに、A 型の旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系のトーラスファイバーのポテンシャル関数を計算した。

研究成果の概要（英文）：With any two-dimensional toric weak Fano stack, we could associate a combinatorial object called a brane tiling, which allows us to describe the derived category of coherent sheaves on this stack in terms of representations of quivers. We have also proved homological mirror conjecture for a basic class of singularities called Brieskorn-Pham singularities. In a slightly different direction, we have computed the potential function for the torus fiber of the Gelfand-Cetlin system on flag varieties of type A.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ミラー対称性

１．　研究開始当初の背景

ミラー対称性は理論物理学における超弦理論に由来する数学的な現象で、ある空間のシンプレクティック幾何学と別の空間の複素幾何学の間に不思議な関係があることを指し、弦理論的 Hodge 数やモチーフ積分、Gromov-Witten 不変量、軌道体コホモロジーや三角圏上の Bridgeland 安定性などの様々な新しい数学の分野を生み出すとともに、超幾何関数や Floer 理論、連接層の導来圏や特殊 Lagrange 部分多様体など、既存の多くの分野の発展を促してきた。

トーリック Fano スタックに対し、そのミラーは同じ次元の代数的トーラス上の正則関数で与えられる。この時、対象がその正則関数の消滅サイクルで、射の空間がそれらの間

の Floer 複体で与えられるような A-infinity 圏が定義され、深谷-Seidel 圏と呼ばれる。一般に、A-infinity 圏に対してその導来圏や Grothendieck 群を定義することができるが、深谷-Seidel 圏の Grothendieck 群に Ext の Euler 数で内積を定義したものが特異点論で重要な Milnor 格子になるという意味で、深谷-Seidel 圏は Milnor 格子の圏化(categorification)であると言われる。

ミラー対称性に関わる様々な現象に概念的な理解を与えるべく、Kontsevich によって 1994 年の国際数学者会議で提唱されたのがホモロジー的ミラー予想である。これはもともと Calabi-Yau 多様体に対して定式化され、任意の Calabi-Yau 多様体に対してある Calabi-Yau 多様体が存在して、前者の連接層の導来圏と後者の深谷圏の導来圏が三角圏として同値であることを主張する。

また、トーリック Fano 多様体に対するホモロジー的ミラー予想も存在し、任意のトーリック Fano スタックに対し、その上の連接層の導来圏がミラーの深谷-Seidel 圏の導来圏と三角圏として同値であることを主張する。

ホモロジー的ミラー予想はミラー対称性に関わる予想の中では最も強い主張であると考えられており、Gromov-Witten 不変量とミラーの周期の関係に関する古典的ミラー予想など、他の多くの予想を系として導くと期待されている。しかし、その重要性にも関わらず、ホモロジー的ミラー予想が証明されているのは 1998 年の Polishchuk-Zaslow による楕円曲線の場合(ただし、厳密に言うと彼らの主張は三角圏の同値よりも少し弱い)と、2003 年の Seidel による 3 次元射影空間の中の 4 次 K3 超曲面の場合(ただし、その証明には誤りがあり、2011 年の改訂版で修正された)に限られていた。

一方、トーリック Fano スタックに対するホモロジー的ミラー予想についても、知られている結果は 2000 年の Seidel による射影平面および 0 次の Hirzebruch 曲面の場合、2006 年の Auroux-Katzarkov-Orlov による重みつき射影平面の場合、2006 年の筆者によるトーリック del Pezzo の場合、それに 2007 年の筆者と山崎雅人氏によるトーリック del Pezzo 曲面をトーラスの有限部分群で割って得られる軌道体の場合に限られていた。

筆者と山崎氏の共同研究における証明は、弦理論の研究者によって 4 次元の超対称ゲージ理論を研究する過程で導入されたブレーン・タイリングと呼ばれる対象を本質的に使う。これはトーラス上の 2 色グラフであり、ここから関係式付き箙が自然に定まる。この関係式付き箙の表現の導来圏は 2 次元のトーリック Fano スタック上の連接層の導来圏とそのミラーの深谷-Seidel 圏の導来圏の両者と三角圏として同値であると予想されており、このことからホモロジー的ミラー予想が系として従う。

これはトーリック Fano スタック上の連接層の導来圏とミラーの深谷-Seidel 圏の導来圏の関係に関する話であるが、トーリック Fano スタックの深谷圏の導来圏について考えることもできる。この場合、ミラーで対応するのは安定導来圏(特異点の三角圏とも呼ばれる)であると考えられている。

トーリック多様体の深谷圏に関する重要な結果は、2003 年の Cho-Oh によるトーラス作用に関する運動量写像のファイバーの Floer コホモロジーの計算と、2008 年の Fukaya-Oh-Ohta-Ono によるポテンシャル関数の計算であった。

また、次数付き安定導来圏に関しては、梶浦-齋藤-高橋によって、2005 年に単純特異点の場合に、また 2007 年に 14 個の例外型特異点を含む幾つかの場合に構造が決定された。また、単純楕円型超曲面特異点と巡回 Gorenstein 特異点については、それぞれ 2006 年と 2007 年に筆者によって構造が決定された。

代数多様体上の因子が与えられたとき、それに接するベクトル場のことをその因子に沿った対数的ベクトル場と呼ぶ。対数的ベクトル場のなす層は常に反射的になることが齋藤恭司によって知られており、特に曲面に対しては常にベクトル束になる。対数的ベクトル場のなす層の同型類からいつ元の因子が復元できるかという問題が Dolgachev-Kapranov によって考察され、対数的ベクトル場に対する Torelli 問題と名付けられたが、2007 年の吉永正彦氏と筆者の共同研究によって、射影平面内の滑らかな 3 次曲線に対しては解決された。

２．研究の目的

ブレーン・タイリングは 2 次元のトーリック Fano スタック上の連接層の導来圏と、そのミラーの深谷-Seidel 圏という、一見まったく掛け離れた二つの三角圏の仲立ちをする組合せ論的な対象であり、ミラー対称性のみならずトーリック幾何や多元環の表現論、統計物理学などの様々な話題と関係している。このブレーン・タイリングについての数学的な理解を深めるのが研究の第一の目的である。

トーリック Fano 多様体の、トーラス作用に関する運動量写像のファイバーとして得られる Lagrange トーラスに関しては、その Floer コホモロジーやポテンシャル関数が Cho-Oh や Fukaya-Oh-Ohta-Ono によって計算された。一方、A 型の旗多様体の上には、Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる、トーリック多様体のトーラス作用に関する運動量写像に非常に良く似た構造を持つ完全可積分系が存在する。さらに、旗多様体はトーリック多様体への退化を持つことが知られている。これを用いて Gelfand-Cetlin 系とトーリック多様体のトーラス作用に関する運動量写像の間に関係を付けることと、それを用いて Gelfand-Cetlin 系のファイバーとして得られる Lagrange トーラスのポテンシャル関数を計算することが第二の目的である。

単純特異点や単純楕円型超曲面特異点を超えるより一般のクラスの特異点に対して、その次数付き安定導来圏や、ミラーの深谷-Seidel 圏の構造を決定し、それらの特異点に対するホモロジー的ミラー予想を証明することが第三の目的である。

さらに、対数的ベクトル場に対する Torelli 問題を一般次元の射影空間の中の滑らかな因子に対して完全に解決することが第四の目的である。

３．研究の方法

（１）石井亮氏および二木昌宏氏と共同でブレーン・タイリングとトーリック幾何の関係を研究した。ブレーン・タイリングの研究における最初の問題点は、確固たる数学的な定義がないことであった。ブレーン・タイリングはトーラス上の２色グラフ(すなわち、頂点の集合が白と黒の２色に塗り分けられていて、任意の辺は違う色の頂点を結んでいるようなグラフ)であって、２次元のトーリック Fano スタックの連接層の導来圏とそのミラーの深谷-Seidel 圏の導来圏の双方に対して組合せ論的な記述を与えると期待されているのだが、トーラス上のどのような２色グラフでもブレーン・タイリングと呼ばれる資格があるわけではない。最初の条件はその２色グラフから定まる箙の表現のモジュライ空間が、安定性のパラメーターを適当に選べば 3 次元の滑らかなトーリック Calabi-Yau 多様体にならなければならないというもので、これに対する十分条件が石井氏との共同研究において既に求められていた。しかし、トーラス上の２色グラフで、ブレーン・タイリングと呼ぶには性質が悪すぎるが、この条件によって排除できないものが存在するので、より強い条件が必要である。これに関しては幾つかの候補があったが、それらの間の関係を明らかにし、正しい条件を決定した。さらに、任意のトーリック Fano スタックに対し、あるブレーン・タイリングが存在して、スタックの連接層の導来圏がブレーン・タイリングに付随する箙の表現の導来圏と同値になることを、Gulotta のアルゴリズムと幾何学的な議論を組み合わせることによって示した。また、ブレーン・タイリングをリボングラフと見て、そこからシンプレクティック Lefschetz ファイブレーションを作った。

（２）トーリック退化は多様体の複素構造を変えることによって得られるが、完全可積分系や Floer コホモロジーはシンプレクティック幾何的な対象であり、複素構造に依らない。中心ファイバーが滑らかでないことによる困難が生じるが、いくつかの仮定のもとでこの困難は回避できることが分かる。これらの仮定は A 型の旗多様体に対しては成り立ち、Gelfand-Cetlin 系のトーラスファイバーのポテンシャル関数を求めることができた。

（３）Brieskorn-Pham 特異点や、A 型と D 型の特異点の Sebastiani-Thom 和として与えられる特異点に対して、次数付き安定導来圏と深谷-Seidel 圏の双方を具体的に記述した。特に、後者では Seidel によるシンプレクティック Picard-Lefschetz 理論を本質的に使う。

（４）滑らかな３次曲線に対しては、それに沿った対数的ベクトル場の層の跳躍直線の集合が Cayleyan と呼ばれる古典的な対象と一致することが証明の重要なステップであった。これを一般化するために、跳躍直線ではなく跳躍因子の集合を考えることによって、ここからもとの因子の Jacobi イデアルを復元することができた。

４．研究成果

(1)ブレーン・タイリングの様々な側面について、石井亮氏および二木昌宏氏と共同で研究を行った。
①代数幾何的側面については、Gulotta によるアルゴリズムと特殊 McKay 対応を用いることによって、任意の 2 次元のトーリック弱 Fano スタックに対して対応するブレーン・タイリングを与えることができた。また、任意のブレーン・タイリングに対して、対応するトーリック Fano スタック上の強巡回例外列を与えることもできた。
②組合せ論的な側面に関しては、整合性条件と呼ばれる条件が重要であり、これまでに様々なものが提案されてきたが、それらが適

当な仮定のもとで同値であることを示すことができた。
③シンプレクティック幾何的な側面については、任意のブレーン・タイリングに対して完全Lefschetz ファイブレーションが存在して、その深谷-Seidel 圏が対応するトーリック Fano スタックの連接層の導来圏と同値になることを示すことができた。

（２）西納武男氏および野原雄一氏と共同でGelfand-Cetlin系のFloer理論的な研究を行った。Gelfand-Cetlin 系は旗多様体を相空間とする完全可積分系であり、表現論と密接に関連している。旗多様体はトーリック多様体への退化を持つことが知られているが、我々の研究によってこの退化が可積分系の構造と整合的であることが示され、それを用いてポテンシャル関数と呼ばれるFloer 理論的な量を計算することができた。この結果から、旗多様体はどのような Hamilton アイソトピーで移しても必ず移す前のものと交叉するような Lagrange 部分多様体を持つことが従う.

（３）二木昌宏氏と共同で、Brieskorn-Pham 特異点や、A 型と D 型の特異点の Sebastiani-Thom 和として与えられる特異点に対して、ホモロジー的ミラー予想を証明しいた。

（４）吉永正彦氏と共同で、対数的ベクトル場に対する Torelli 問題を一般次元の射影空間の中の滑らかな因子に対して完全に解決した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）
①Kazushi Ueda, On graded stable derived categories of isolated Gorenstein quotient singularities, Journal of Algebra, Volume 352, Issue 1, pages 382-391, 2012, 査読あり

②Takeo Nishinou, Yuichi Nohara, Kazushi Ueda, Potential functions via toric degenerations, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Volume 88, Number 2, pages 31-33, 2012, 査読あり

③Akira Ishii, Kazushi Ueda, A note on consistency conditions on dimer models, Higher Dimensional Algebraic Geometry, RIMS Kokyuroku Bessatsu B24, pages 143-164, 2011, 査読あり

④ Masahiro Futaki, Kazushi Ueda, Homological mirror symmetry for Brieskorn-Pham singularities, Selecta Mathematica, Volume 17, Number 2, pages 435-452, 2011, 査読あり

⑤Masahiro Futaki, Kazushi Ueda, Exact Lefschetz fibrations associated with dimer models, Mathematical Research Letters, Volume 17, Number 06, pages 1029-1040, 2010, 査読あり

⑥Kazushi Ueda, Masahito Yamazaki, A note on dimer models and McKay quivers, Communications in Mathematical Physics, Volume 301 (2010), Number 3, 723-747, 査読あり

⑦Takeo Nishinou, Yuichi Nohara, Kazushi Ueda, Toric degenerations of Geland-Cetlin systems and potential functions, Advances in Mathematics, Volume 224, Number 2, Pages 648-706, 2010, 査読あり

⑧ Kazushi Ueda, Masahiko Yoshinaga, Logarithmic vector fields along smooth divisors in projective spaces, Hokkaido Mathematical Journal, Volume 38, Number 3, Pages 409-415, 2009, 査読あり

⑨Kazushi Ueda, Masahito Yamazaki, Toric Calabi-Yau four-folds dual to Chern-Simons matter theories, Journal of High Energy Physics, Number 12, 045, 20 pp, 2008, 査読あり

⑩ Kazushi Ueda, Masahiko Yoshinaga, Logarithmic vector fields along smooth plane cubic curves, Kumamoto Journal of Mathematics, Volume 21, Pages 11-20, 2008, 査読あり

〔学会発表〕（計 23 件）
① Kazushi Ueda, Homological mirror symmetry and singularities, Topology of singularities and related topics, 2012 年 3 月 27 日, Dalat University, ベトナム

② Kazushi Ueda, Dimer models and homological mirror symmetry, Noncommutative algebraic geometry and D-branes, 2011 年 12 月 14 日, The State University of New York, アメリカ合衆国

③Kazushi Ueda, On the derived category

of the quintic 3-fold, Derived Categories 2011 Tokyo, 2011年1月27日, 東京大学

④Kazushi Ueda, Dimer models, exceptional collections and non-commutative crepant resolutions, Test problems for the theory of finite-dimensional algebras, 2010年9月15日, Banff International Research Station, カナダ

⑤ Kazushi Ueda, Homological mirror symmetry for Brieskorn-Pham singularities, 幾何学シンポジウム, 2009年8月29日, 佐賀大学

〔その他〕
ホームページ等

http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kazushi/

６．研究組織
(1)研究代表者
植田 一石 (Ueda Kazushi)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60432465