

機関番号：14301

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740038

研究課題名 (和文) 超平面配置の幾何学と組合せ論

研究課題名 (英文) Geometry and combinatorics of hyperplane arrangements

研究代表者

吉永 正彦 (YOSHINAGA MASAHIKO)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：9046764

研究成果の概要 (和文)：初年度は主に射影空間上の因子の対数的ベクトル場の層を代数幾何学的観点から調べた。Generic な超曲面のトレリ型問題 (植田氏との共同研究)、超平面配置の重複度付き対数的ベクトル場の加群の自由性についての成果 (阿部、寺尾氏との共同研究) があつた。後半の 2 年は、極小性とその応用についての研究を中心に行い、基本群の新たな表示、局所係数コホモロジーの消滅に関する進展が得られた。

研究成果の概要 (英文)： In the first year, I studied the sheaf of logarithmic vector fields associated to divisors on the projective space. I obtained several results on Torelli-type theorem for generic hypersurface (Collaboration with K. Ueda) and on the freeness for hyperplane arrangements with multiplicities. In the second and third year, I studied minimality of hyperplane arrangements and applications. I obtained new presentations for fundamental groups and a characterization for vanishing twisted cohomology groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：超平面配置、対数的ベクトル場、極小セル分割

1. 研究開始当初の背景

超平面配置の対数的ベクトル場の自由性は、超平面配置を介して組合せ論と代数幾何学、トポロジーをつなぐ重要な概念である。Edelman-Reiner 予想の解決によって認識された事実として、超平面配置の自由性を特徴づけるためには、関連した多重配置の自由性の決定が不可欠であることが認識され、2005 年頃から多重自由配置の一般論が展開され、Abe-Terao-Wakefield により、加除定理、特性多項式の定式化などの基本結果が得

られていた。

2000 年頃 Dimca-Papadima, Randell 等によって発見された超平面配置の極小性は、それまでに知られていた超平面配置の位相的な結果に自然な説明を与えるだけでなく、多くの応用が期待されている。応用に不可欠な、極小セル分割の精密な記述の研究が、筆者や Salvetti 氏のグループによって開始されていた。

2. 研究の目的

超平面配置の自由性の研究には、多重自由配置の研究が不可欠であることが分かっている。重複度付き超平面配置の自由性の研究により、自由超平面配置を深く理解することを目指す。また、超平面配置が自由でない場合にも、対数的ベクトル場の構造と、組合せ論的な構造との間には密接な関係があることが観察されている。自由性とは独立に、対数的ベクトル場の幾何学的・代数的構造が、超平面配置の組合せ論的構造を統制する様子を明らかにすることを目指す。

また自由配置とは対極にある、ある種の genericity をもった超曲面に対して「Torelli 型定理」という現象が Dolgachev-Kapranov によって観察されている。これは対数的ベクトル場の層から、元の超曲面を復元できることを意味しており、バンドルのモジュライ空間の新たなパラメータ付けを与えることになる。どのようなクラスの超曲面で、トレリ型定理が成り立つかを明らかにする。

超平面配置の極小性については、その存在は分かっているが、具体的な表示については分かっていない。極小セル分割の精密な記述を通して、局所系コホモロジーの具体的な計算や、ホモトピー型や基本群の新たな理解を目的とする。

3. 研究の方法

自由性や多重配置の研究は純粋に代数幾何学的な方向から、コクセター配置の組合せ論的構造に関する部分まで、いくつかのテーマにまたがる。植田一石氏、阿部拓郎氏、寺尾宏明氏らとの共同研究を通して、進展を図る。極小セル分割については、これまでに得られている一般論をつかい、まずは二次元の場合に限って、局所系係数ホモロジーや基本群の計算への応用を行う。ピサの Salvetti 氏等のグループも別の方針での極小セル分割の研究を開始しており、相互関係の理解が、極小セル分割の構造を明らかにする上で重要である。

4. 研究成果

対数的ベクトル場の研究については、射影空間上の generic な因子や多重配置の自由性、コクセター多重配置の対数的ベクトル場の構造についての進展が得られた。植田一石氏との共同研究により、射影空間上の滑らかな因子の対数的ベクトル場から元の超平面配置が復元できるための必要十分条件が明らかになった。特に平面三次曲線の場合は、対応するベクトル束のモジュライ空間の開集合と j 不変量がゼロでない 3 次曲線とが一対一対応することが分かる。対数的ベクトル場については、阿部拓郎氏、寺尾宏明氏との共同研究により、任意の重複度に対して重複度付きベクトル場の加群が自由化群になるこ

と超平面配置が 2 次元の配置の直積であることが同値であることが分かった。また以前の仕事を一般化し、准定数重複度を持つコクセター配置に対して、自由性/非自由性を完全に決定した。これは以前から予想されていた、対数的ベクトル場のレベルでのコクセター数シフト現象を明らかにしたものであり、証明は齋藤の原始微分の理論をフルに使う。応用として、准定数多重コクセター配置の特性多項式が組合せ論的情報を使って計算できることが分かる。一般に多重配置の特性多項式の計算は（自由配置以外では）大変困難で、准定数コクセター多重配置は、（自由でなくても）その特性多項式がよくわかる初めてのクラスである。齋藤のホッジフィルトレーションと多重コクセター配置の関係がある程度見えてきた成果と言える。

極小性とその応用については、青本の研究以来、Generic な局所系に対して、ねじれコホモロジーが中間次元以外で消滅すること、中間次元部分が有界 Chamber で生成されることが知られていたが、この現象が起こるための必要十分条件を二次元の場合に決定した。また、ごく最近、極小セル分割の双対にあたるストラティフィケーションの記述に成功した。極小性はもともとモース理論を使って証明されていたが、その際に使われる不安定セル (descending cell) ではなく、安定セル (ascending cell) に注目すると、半代数的集合としての明示的な表示が存在するというアイデアに基づく。この結果については論文を準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

1. Takuro Abe, Masahiko Yoshinaga, Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities. *Journal of Algebra*. 322 (2009), 2839–2847, 査読有

2. Masahiko Yoshinaga, On the extendability of free multiarrangements. *Arrangements, Local Systems and Singularities: CIMPA Summer School, Galatasaray University, Istanbul, 2007*, 273–281, *Progress in Mathematics*, 283, Birkhauser, Basel, 2009, 査読有

3. Masahiko Yoshinaga, Chamber basis of the Orlik-Solomon algebra and Aomoto complex.

Arkiv for Matematik, 47 (2009), 393-407, 査読有

4. Kazushi Ueda, Masahiko Yoshinaga, Logarithmic vector fields along smooth divisors in projective spaces. Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 38, No. 3, 409--415, 2009, 査読有

5. Takuro Abe, Hiroaki Terao, Masahiko Yoshinaga, Totally free arrangements of hyperplanes. Proc. A. M. S. 137 (2009), 1405--1410. 査読有

6. Max Wakefield, Masahiko Yoshinaga, The Jacobian ideal of a hyperplane arrangement. Mathematical Research Letters, Vol. 15, (2008), no. 4, 795--799. 査読有

7. Kazushi Ueda, Masahiko Yoshinaga, Logarithmic vector fields along smooth plane cubic curves. Kumamoto Journal of Mathematics, Vol. 21 (2008), 11--20. 査読有

8. Masahiko Yoshinaga, Generic section of a hyperplane arrangement and twisted Hurewicz maps. Topology and its applications, 55 (2008), 1022--1026. 査読有

9. Takuro Abe, Masahiko Yoshinaga, Splitting criterion for reflexive sheaves. Proc. A. M. S. 136 (2008), 1887--1891. 査読有

[学会発表] (計 16 件)

1. Masahiko Yoshinaga, On the irreducibility of moduli spaces of line arrangements, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2011, Tokyo Metropolitan University, 2011年3月8日.

2. Masahiko Yoshinaga, Minimal Stratifications for Line Arrangements, The 6th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar, Kagoshima University, 2011年2月15日.

3. Masahiko Yoshinaga, Minimal Stratifications for Line Arrangements, Workshop on Geometry and Analysis of Discriminants, IPMU, 2011年2月7日--8日

4. Masahiko Yoshinaga, On the

irreducibility of moduli spaces of line arrangements, Topology of Singularities and the related geometry, Tohoku University, 2011年1月5日.

5. Masahiko Yoshinaga, On the free arrangements and truncated affine Weyl arrangements. KAIST Discrete Math Seminar, KAIST, Daejeon, Korea, 2010年10月26日.

6. Masahiko Yoshinaga, Modules of logarithmic derivations and applications to enumerative problems of hyperplane arrangements. 2010 Global KMS International Conference, POSTECH, Pohang, Korea, 2010年10月22日.

7. Masahiko Yoshinaga, Minimal Stratification for Line Arrangements. Combinatorial and Geometric aspects of Hyperplane Arrangements, Centro di Ricerca Matematica "Ennio De Giorgi" Pisa, 2010年5月25日.

8. Masahiko Yoshinaga, Minimal presentations for the fundamental groups of the complement of hyperplane arrangements. Interplay between representation theory and geometry, Tsinghua University, China, 2010年5月3日

9. Masahiko Yoshinaga, Minimal presentations for the fundamental groups of the complement of hyperplane arrangements. SEMINARI DI GEOMETRIA, Universita di Pisa, Italy, 2010年4月15日.

10. Masahiko Yoshinaga, Minimal presentations for the fundamental groups of the complement of hyperplane arrangements. Topology of Singularities and the related geometry, Hanoi, Vietnam, 2010年3月23日

11. Masahiko Yoshinaga, 超平面配置のトポロジー: 極小性とその周辺, 北海道大学数学教室談話会, 北海道大学, 2010年2月18日.

12. Masahiko Yoshinaga, Orlik-Solomon 代数と青本複体の Chamber 基底. 超幾何方程式研究会 2010, 神戸大学, 2010年1月7日

13. Masahiko Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz hyperplane

section theorem. 5-th Franco-Japanese
Symposium on Singularities, Strasbourg,
2009年8月25日

14. Masahiko Yoshinaga, Arrangements and
Algebraic Geometry (Survey lecture, 3hrs),
日本数学会季期研究集会 Arrangements of
Hyperplanes, 北海道大学, 2009年8月3日
--4日.

15. Masahiko Yoshinaga, ねじれホモロジー
の消滅定理とねじれ Hurewicz 写像, 超平
面配置のさまざまな側面, 神戸大学, 2009年
2月13日.

16. Masahiko Yoshinaga, Minimality of
hyperplane arrangements and
applications, Geometry of Singularities
and Manifolds, 草津, 2008年9月12日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉永正彦 (YOSHINAGA MASAHIKO)
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：9046764