

機関番号：32665

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740039

研究課題名（和文） プレッツェル結び目に沿った有限型デー手術の決定

研究課題名（英文） Finite surgeries on pretzel knots

研究代表者

市原 一裕 (ICHIHARA KAZUHIRO)

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号：00388357

研究成果の概要（和文）：

3次元球面内の結び目に沿った有限型デー手術(有限基本群をもつ3次元多様体を生成するデー手術)の特徴付けを目指し、それに向けた第一歩として、モンテシノス結び目に沿った有限型デー手術の完全分類を与えた。また関連する研究として、双曲結び目に沿ったザイフェルト多様体を生成するデー手術(ザイフェルト手術)の研究、および、モンテシノス結び目の位相的性質(境界スロープ直径、クロスキャップ数)に関する研究も行った。

研究成果の概要（英文）：

Toward the characterization of the finite surgery (i. e., Dehn surgery producing 3-manifolds with finite fundamental groups) on the knots in the 3-sphere, as a first step, we gave a complete classification of finite surgeries on Montesinos knots. Related to the main subject, also studied were Dehn surgeries yielding Seifert fibered manifolds, called Seifert surgeries, and topological properties of Montesinos knots, called boundary slope diameters and crosscap numbers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1200,000	360,000	1,560,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	3200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何・3次元多様体論

## 1. 研究開始当初の背景

3次元多様体間の関係を研究する中でデー手術とよばれる「3次元多様体とその中の結び目から新しい多様体を生成する操作」が開発された。デー手術の中でも、基本群が自明群である3次元球面から、基本群が有限群となる多様体を生成するデー手術、つまり、有限型デー手術は、その定義の簡明さに反して特異な場合にしか起こらず、非常に

興味深い研究対象として研究されている。その中で S. Boyer 氏と X. Zhang 氏により、非自明な結び目に関して有限型デー手術は高々5個であることが示された(有限型デー手術予想の肯定的解決)。ここで、有限型デー手術を5個許容する例として  $(-2, 3, 7)$ -プレッツェル結び目と呼ばれるものが知られている。このことから特に、プレッツェル結び目に沿った有限型デー手術

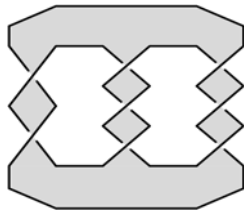
の研究が T. Mattman 氏らによって進められていた。しかしながら、完全決定には至っていなかった。

## 2. 研究の目的

まず、3次元球面内のプレッツェル結び目に沿った有限型デー手術の完全決定を目指す。つまり、どのようなプレッツェル結び目に沿った、どのようなデー手術が有限型となるか、完全なリストを作成することを目標とする。さらにこれをもとにして、より一般の結び目に沿ったデー手術に対し、有限型となるための必要十分条件の発見に向けて研究を深化させる。

## 3. 研究の方法

まず本研究の具体的な目標である3次元球面内のプレッツェル結び目(右図参照)に沿った有限型デー手術の完全決定を目指して、



- (1) 有限型デー手術を許容しうるプレッツェル結び目の特徴付け
- (2) その特徴付けを満たすプレッツェル結び目の決定と分類

の2つのステップにわけ、研究を進める。

具体的には、(1)のステップでは、P. Ozsvath と Z. Szabo による結果、Y. Ni による結果を利用する。これにより、有限型手術を許容する結び目はファイバー結び目であり、さらに、そのアレクサンダー多項式と呼ばれる不変量の値に特殊な制限がつくことがわかる。また(2)のステップでは、上記の制限を満たす結び目の完全決定を目指し、D. Gabai の結果を利用し、具体的なアレクサンダー多項式の計算を行う

さらに、以上の研究の結果を受け、より広いクラスの結び目までを視野にいれ研究を進展させる。

一方で、結び目に沿った有限型手術、またそれを含む、より一般のザイフェルト手術に関連して、種々の研究を進める。

## 4. 研究成果

上記、研究方法に基づき、以下の成果が得られた。

- (1) 本研究の具体的な当面の目標であったプレッツェル結び目に沿った有限型デー手術に関して、論文「Cyclic and finite surgeries on Montesinos knots」において、より一般のモンテシノス結び目に対してまで完全に決定し分類することができた。

- (2) 研究目的に関連して、ザイフェルト多様体

を生成するような手術(ザイフェルト手術)の研究を行い、以下の成果を得た。論文「Longitudinal Seifert fibered surgeries on hyperbolic knots」では、ザイフェルト多様体を生成する0-デー手術を許容するような3次元球面内の双曲的小結び目の例を構成した。論文「All exceptional surgeries on alternating knots are integral surgeries」では、3次元球面内の双曲的交代結び目に沿ったザイフェルト多様体を生成するデー手術は全て整数型であることを示し、先行研究と合わせて、3次元球面内の双曲的結び目に沿った例外的デー手術が全て整数型であることを証明した。また有限型デー手術の一般化であるザイフェルト手術(ザイフェルト多様体を生成する手術)に関しては、論文「Hyperbolic sections in Seifert fibered surface bundles」において、その双対結び目を考えることにより研究を行った。実際、双対結び目として現れるような、曲面束であるザイフェルト多様体内の断面結び目について、それが双曲的となるための必要十分条件を得た。

- (3) 2つの論文「Lower bounds on boundary slope diameters on Montesinos knots」「Crosscap numbers of pretzel knots」では、プレッツェル結び目、および、モンテシノス結び目に関して、その位相幾何的な性質(境界スロープ半径、クロスキャップ数)に関して研究を行った。これらは、そのような結び目に沿ったデー手術に関する今後の研究において、基礎となりうるものと考えている。

- (4) 現在は、研究実施計画を前倒しし、さらに一般の3次元球面内の結び目に沿った有限型デー手術の特徴付けに向けて研究を進めている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

以下の雑誌論文に関して、すべて査読あり。

1. K. Ichihara and I. D. Jong,

Toroidal Seifert fibered surgeries on Montesinos knots.

Comm. Anal. Geom. 18 (2010), no. 3, 579-600.

2. K. Ichihara and S. Mizushima,  
Crosscap numbers of pretzel knots.  
Topology Appl., 157 (2010), no. 1,  
193-201.
3. K. Ichihara and K. Motegi,  
Hyperbolic sections in Seifert  
fibered, surface bundles.  
Quart. J. Math., 60 (2009), no. 4,  
475-486.
4. K. Ichihara and S. Mizushima,  
Lower bounds on boundary slope  
diameters for Montesinos knots.  
Kyungpook Math. J., 49 (2009), no. 2,  
321-348.
5. K. Ichihara and I. D. Jong,  
Cyclic and finite surgeries on  
Montesinos knots.  
Algebr. Geom. Topol., 9 (2009),  
731-742.
6. K. Ichihara  
All exceptional surgeries on  
alternating knots are integral  
surgeries.  
Algebr. Geom. Topol., 8 (2008),  
2161-2173.
7. K. Ichihara, Kimihiko Motegi, H-J. Song  
Longitudinal Seifert fibered  
surgeries on hyperbolic knots.  
Bull. Nara Univ. Ed. Natur. Sci.  
(奈良教育大学紀要 自然科学編),  
57 (2008), no. 2, 21-25.

[学会発表] (計 6 件)

1. K. Ichihara, I. D. Jong, S. Mizushima,  
On exceptional surgeries on  
Montesinos knots,  
International Conference  
Japan-Mexico on Topology and its  
Applications,  
2010. 9. 29  
The Universidad de Colima,  
Colima, Mexico.
2. K. Ichihara  
Exceptional surgeries on  
alternating knots,  
研究会「結び目と 3 次元多様体」,  
2010. 3. 18  
慶應義塾大学.
3. K. Ichihara  
モンテシノス結び目に沿った例外的  
デーモン手術について,  
研究集会「Intelligence of Low  
Dimensional Topology」,  
2009. 11. 14  
大阪市立大学学術情報センター.
4. K. Ichihara  
モンテシノス結び目に沿った有限  
型デーモン手術,  
日本数学会 2009 年度秋期総合分科  
会,  
2009. 9. 24  
大阪大学豊中キャンパス.
5. K. Ichihara,  
Bounds on exceptional surgery  
slopes,  
研究集会「The first KOOK-TAPU  
Joint Seminar on Knot Theory and  
Related Topics」,  
2009. 8. 19.  
大阪市立大学学術情報センター.
6. K. Ichihara,  
レンズ空間のデーモン手術距離につ  
いて,  
日本数学会 2008 年度秋期総合分科  
会,  
2008. 9. 25.  
東京工業大学大岡山キャンパス.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/Research/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

市原 一裕 (ICHIHARA KAZUHIRO)

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号：00388357

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし