

機関番号：15401

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008 ~ 2010

課題番号：20740041

研究課題名 (和文) 組み紐理論とヘガードフレア理論を用いた結び目の研究

研究課題名 (英文) A study on knots using braid theory and Heegaard Floer theory

研究代表者

松田 浩 (MATSUDA HIROSHI)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：70372703

研究成果の概要 (和文)：次に挙げる特徴(1)から(4)を持つ横断的結び目対 S, T の具体例を自然数 n が 1, 2, 3 のときに構成した。

- (1) $S(n)$ は S から n 回の安定化操作を施して得られる
- (2) $S(n)$ と T の位相的結び目型は同じである
- (3) $S(n)$ と T の自己絡み数は同じである
- (4) $S(n)$ と T の横断的結び目型は異なる

上記の(2)から(4)の特徴を持つ位相的結び目型は「横断的結び目として単純でない」と呼ばれ、その存在については最近まで知られていなかった。特に2回以上の安定化操作を施しても「単純でない」横断的結び目については本研究が最初の例を与えた。

研究成果の概要 (英文)：When $n = 1, 2$ and 3 , we construct a pair of transverse knots S and T satisfying the following properties (1)-(4)；

- (1) $S(n)$ is obtained from a transverse knot S by n stabilizations,
- (2) the topological knot type of T is the same as that of $S(n)$,
- (3) the self-linking number of T is equal to that of $S(n)$, and
- (4) T is not transversely isotopic to $S(n)$.

A topological knot type satisfying the above properties (2)-(4) is called “transversely non-simple.” It was not known whether there exist transversely non-simple knot types until recently. In particular, this is the first example of a pair of transversely non-simple knots such that one of the pair admits at least two destabilizations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：組み紐、横断的結び目

1. 研究開始当初の背景

結び目の閉組み紐表示は 組み紐群の中で共役類を与える。1つの結び目型に対応する交換類(共役類を交換操作で割って得られる同値類)の数は高々有限個であることが知られていた。同じ結び目型を表すが異なる交換類に属する閉組み紐の対は ある分岐付き曲面上に良い射影図を持つことを示していた。結び目の最小组み紐数が3の場合には これらの対を全て調べ尽くすことにより、同じ結び目型を表す交換類の対は「フライプ」と呼ばれる操作 1 回だけで移り合うことを示していた。つまり 1つの結び目型に対応する交換類の数は 高々2 個であることが分かっていた。組み紐数が 3 であれば 交換操作を 1 回施して得られる閉組み紐の対は同じ共役類に対応するので 以上のことから同じ結び目型に対応する共役類の分類が得られることが分かる。組み紐群の共役問題は 既に解決されているので、最小组み紐数が 3 の場合には 結び目の分類問題が解決されたことが分かる。そこで最小组み紐数が 4 以上の場合にも上記と同様の方法を実行できるのではないかと考えていた。

接触構造の入った 3次元多様体内のルジャンドリアン結び目、横断的結び目はそれ自身 興味深い研究対象である上に接触構造の幾何的な性質と密接に結びついているため 注目を集める研究対象となっている。古典的不変量では区別できないが異なるルジャンドリアン結び目対の具体例が 約 15 年前に発見されて以来、このようなルジャンドリアン結び目対を区別する新しい不変量についての研究が ラグランジュ交叉のフレアー理論などを使って大きく進展している。一方 古典的不変量では区別できないが異なる横断的結び目対の具体例は ほとんど見つからないため、横断的結び目の新しい不変量についての研究には 大きな進展は見られなかった。

2. 研究の目的

同じ結び目型に対応する 有限個の交換類を数え上げることにより、結び目の分類問題を解決させることを

研究の 1つの目標としている。本研究では 1つの結び目型に対応する交換類の対は 具体的にどのような操作で移り合うのかを調べ、さらに 有限個の交換類全体の構造を明らかにしていくことを 1つの目的とする。

結び目の閉組み紐表示と 横断的結び目との対応に着目し、結び目の閉組み紐表示についての研究から得られる結果を 横断的結び目理論に応用することにより、まだ 本格的に始まったばかりといえる横断的結び目理論を発展させることを 研究の 1つの目標とする。そのために必要となる具体例、道具を、組み紐理論、組み合わせ的ヘガードフレアー理論を使って整備することを 本研究の1つの目的とする。

3. 研究の方法

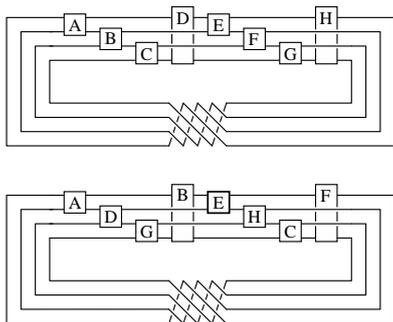
結び目の閉組み紐表示に関する研究からホップ・フライプという操作を定義していた。横断的結び目と閉組み紐との対応を考えると ホップ・フライプは古典的不変量だけでは区別できない新しい横断的結び目の対を与えると予想できる。この予想を検証するため ホップ・フライプで移り合う横断的結び目対の具体例をいくつか構成し、組み合わせ的ヘガードフレアー理論の分野において定義されていた横断的結び目の新しい不変量を計算した。そして 構成した横断的結び目は異なることを確認し、予想が正しいことを示した。

アレキサンダー多項式、組み紐群のビューラウ表現の拡張という観点から 結び目フレアーホモロジー群を捉えることを試みた。

4. 研究成果

2008年度は フライプと呼ばれる操作を拡張した ホップ・フライプという操作で移り合う閉組み紐の対について調べた。特に この閉組み紐の対に対応する横断的結び目の対で 古典的不変量(自己絡み数)だけでは区別

できないものについて調べた。この性質を持つ横断的結び目の対は 3次元多様体上の接触構造の分類と密接に関係しているため 接触トポロジーの分野で注目されている。古典的不変量では区別できないが異なる横断的結び目の対で 研究開始当初までに知られていたものは 全て負符号のフライプで移り合うことが分かっていた。負符号フライプを拡張した操作である 負符号 ホップ・フライプについても 古典的不変量だけでは区別できないが異なる横断的結び目の対を与えることを いくつかの例を構成することで 示した。具体的には 次の性質を満たす横断的結び目の対 S, T の族を構成した。「 S と T はそれぞれ閉3-組み紐, 閉4-組み紐に対応し 負符号ホップ・フライプ1回で移り合う。 S から安定化操作1回で得られる横断的結び目 $S(1)$ と T とは 古典的不変量と位相的結び目型は同じであるが 横断的結び目としては異なる。以下に負符号 ホップ・フライプで得られる閉組み紐対の例を図示している。



また 次の性質を持つ横断的結び目の対 S, T の具体例を構成した。この例での S, T は 上記の例での S, T とは異なる結び目である。 S と T はそれぞれ閉3-組み紐, 閉5-組み紐に対応し 負符号ホップ・フライプ1回で移り合う。 S から安定化操作2回で得られる横断的結び目 $S(2)$ と T とは 古典的不変量と位相的結び目型は同じであるが 横断的結び目としては異なる。 $S(2)$ と T とが横断的結び目として異なることを示すために 計算機を使って結び目フレアーホモロジー群の計算を実行した。安定化操作を2回施しても異なる横断的結び目が出てくる例は 当時までに見つからない新しいものであった。

2009年度は 2008年度に引き続き ホップ・

フライプという操作で移り合う閉組み紐の対について調べた。また結び目フレアーホモロジー群を 組み紐群の表現の観点から捉える研究を始めた。

2009年度は 負符号ホップ・フライプ1回で移り合う閉3-組み紐 S と 閉6-組み紐 T で, 対応する横断的結び目が 次の性質を持つものを構成した。 S から安定化操作3回で得られる横断的結び目 $S(3)$ と T とは 古典的不変量と位相的結び目型は同じであるが 横断的結び目としては異なる。安定化操作を3回施しても異なる横断的結び目の対は 今までに見つかっていなかった新しいものである。

これまでの横断的結び目の構成方法を自然に拡張すると 安定化操作を任意の回数 施しても異なる横断的結び目の対を構成できると考えられる。計算機を用いて不変量を計算する現在までの方法では 安定化操作を4回以上 施した例については 計算量が膨大になるため実行できていない。そこで負符号ホップ・フライプの横断的結び目理論における役割を明らかにし 計算機を用いずに横断的結び目として異なることを証明することは今後の課題である。

結び目フレアーホモロジー群はアレキサンダー多項式の拡張の1つとして理解することができ,アレキサンダー多項式は 組み紐群のビューラウ表現から定義することができる。2009年度は ビューラウ表現を拡張することにより得られるアレキサンダー型の多項式から 結び目フレアーホモロジー群の情報が得られるかについて調べた。従来のビューラウ表現を $(2, 1)$ 型と見なすことによりビューラウ表現の拡張を定義し, $(3, 1)$ 型と $(4, 2)$ 型の表現を求めた。 $(3, 1)$ 型のビューラウ表現から自然に定義されるアレキサンダー型の多項式は, 従来のアレキサンダー多項式と本質的に同じであることが分かった。

2009年度から継続して2010年度も 組み紐群のビューラウ表現を拡張することにより得られるアレキサンダー多項式型の量について調

べた。2009年度に求めた(4, 2)型のビューラウ表現から自然に定義されるアレキサンダー多項式型の量は、結び目不変量であることが分かった。またこの結び目不変量は従来のアレキサンダー多項式と本質的に同じ情報を持つことが分かった。

また1つの結び目型に対応する交換類の対が具体的にどのように移り合うのかを調べる本研究の目的の1つに取り組むため2009年度までとは異なる視点から分岐付き曲面を構成する方法について研究をすすめている。この研究にはニューヨーク州立大学バッファロー校のメナスコ教授とオーフス大学附属モジュライ空間の量子幾何学センターのラファウンテン氏から協力を得ている。2009年度までは交換類の対を載せることができる境界付き曲面を構成する方法について研究をすすめていたが、2010年度は境界のない分岐付き閉曲面を構成する方法について研究をすすめた。この閉曲面を使い閉組み紐に対応する横断的結び目の古典的不変量を組み合わせ的な情報だけを使って計算する方法について現在研究をすすめている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

1. 松田 浩, An extension of Burau representation, and a deformation of Alexander polynomial, 京都大学数理解析研究所講究録, 1716 巻, 査読無, 2010, pp1-5

[学会発表] (計14件)

1. 松田 浩, On Legendrian and transversely non-simple knot types, 接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺, 2011年1月22日, 京都市職員厚生会 職員会館かもがわ

2. Matsuda Hiroshi, An extension of Burau representation, and a deformation of Alexander polynomial, Singularities, knots and mapping class group, 2010年9月7日, Universite de Bourgogne, France

3. 松田 浩, An extension of Burau representation, and a deformation of

Alexander polynomial, Intelligence of Low-dimensional Topology, 2010年6月2日, 京都大学 数理解析研究所

4. 松田 浩, On transversely and Legendrian non-simple knot types, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010, 2010年3月10日, 広島大学

5. 松田 浩, Transversely non-simple knot types -- calculating HFK by computer, トポロジーとコンピュータ 2009, 2009年9月1日, 東京工業大学

6. 松田 浩, Transversely non-simple knot types -- calculating HFK by hand, 夏の学校「フレアーホモロジーとその周辺」, 2009年8月28日, 名古屋大学

7. 松田 浩, Links in an open book decomposition and in the standard contact structure, 夏の学校「フレアーホモロジーとその周辺」, 2009年8月27日, 名古屋大学

8. 松田 浩, Knot Floer Homology: オリジナルの定義から組み合わせ的な記述へ, 夏の学校「フレアーホモロジーとその周辺」, 2009年8月26日, 名古屋大学

9. 松田 浩, One-step Markov Theorem on exchange classes, 拡大東京女子大学トポロジーセミナー, 2009年3月21日, 東京女子大学

10. 松田 浩, One-step Markov Theorem on exchange classes, 日本数学会 秋季総合分科会 トポロジー分科会 特別講演, 2008年9月24日, 東京工業大学

11. 松田 浩, One-step Markov Theorem on exchange classes, トポロジー火曜セミナー, 2008年7月15日, 東京大学

12. 松田 浩, One-step Markov Theorem on exchange classes, 低次元トポロジーセミナー, 2008年6月3日, 大阪大学

13. 松田 浩, One-step Markov Theorem on exchange classes, Workshop on Topology and Geometry --Braids and Related Topics--, 2008年5月30, 31日, 広島大学

14. 松田 浩, One-step Markov Theorem on exchange classes, 広島大学 数学教室 談話会, 2008年4月15日, 広島大

学

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松田 浩 (MATSUDA HIROSHI)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：70372703

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：