様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　4　月　9　日現在

機関番号：１７２０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008 ～2011
課題番号：20740042
研究課題名（和文）　極小曲面のモジュライ空間におけるガロア理論の研究

研究課題名（英文）　Moduli space of minimal surfaces with Galois Theory

研究代表者
庄田　敏宏　（SHODA　TOSHIHIRO）
佐賀大学・文化教育学部・准教授
研究者番号：10432957

研究成果の概要（和文）：
極小曲面全体の集合である「極小曲面のモジュライ空間」を研究する上で，モジュライ空間上の周期写像を考えることが重要なのであるが，様々な極小曲面の具体例の周期を計算してみると，周期の性質には何らかの対称性があるような印象がある．それは方程式論におけるガロア理論に見られるような，何らかの可解性によって記述できる対称性であることが期待される．そこで本研究では極小曲面のモジュライ理論をガロア理論の観点から確立したい．

研究成果の概要（英文）：
We usually call the set of all minimal surfaces “Moduli space of minimal surfaces”. To consider the Moduli space of minimal surfaces, it is important to study Period map on the Moduli space of minimal surfaces. We have calculated periods of many examples of minimal surfaces. From the experiences, we conjecture that there may be symmetry by solvable group in Galois Theory. Thus, we will establish the Moduli theory of minimal surfaces in terms of the Galois Theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野： 微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：極小曲面，モジュライ空間，ガロア理論

１．研究開始当初の背景

Riemann多様体内の部分多様体で，その面積関数の第１変分が 0 となる多様体を極小部分多様体といい，その第２変分が 0 以上になる部分多様体を安定極小部分多様体という．本研究はR^n内の周期的極小曲面(平坦トーラスT^n内の種数gコンパクト極小曲面)およびそのモジュライ空間におけるガロア理論を確立し，その構造を解明することを目標とする．水中の脂質や界面活性剤は分子密度が高ければその膜はSchwarz曲面などの周期的極小曲面を形成する．また近年，周期的極小曲面を型とする模型上の電子流の研究がなされており，その共役極小曲面の模型上の電子流との相関関係が研究されている．このことから，周期的極小曲面は数学に限らず分子化学や電子工学においても重要な研究対象である．

２．研究の目的

以下では具体例の構成およびモジュライ理論の両面から動機付けられる本研究の目的を述べる.

まず具体例の観点から述べるが，極小曲面の研究手段として有力な方法は等温座標系により曲面にRiemann面の構造を入れ,複素関数論を用いてその構造を調べるというものである．このとき，$\boldsymbol{R}^n$内あるいは$\boldsymbol{T}^n$内の極小曲面は正則微分ω_1，ω_2，・・・，ω_nの線積分の実部として表される(Weierstrass表現公式)：

$\mathrm{Re}\int(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$　・・・　(＊)

この線積分が道のとり方によらずwell-definedになるための条件のことを周期条件という．即ち，極小曲面の具体例を構成するには適当なRiemann面およびその正則微分を用いて周期条件をみたすような線積分(*)を与えればよい．しかし,周期条件を解決できない場合が多く，また，Riemann面にある程度の対称性をもたせなければ周期を具体的に計算することもできない.

周期条件を回避するために編み出された手法として，現在極小曲面の構成法として有力視されている手段は(コンピューター・グラフィックスを用いて見通しをつけた後で)適当な対称性のある折れ線に対するPlateau問題の解曲面をその境界に沿って鏡像の原理を用いて増やしていく手法である．これらの方法は上記のWeierstrass表現公式を用いずに極小曲面を構成できるので周期条件を考えなくてもよいという利点がある反面,$\boldsymbol{R}^3$内の議論にしか適応できず一般の$\boldsymbol{R}^n$内の議論にはもち込みにくい.一方，筆者による構成法は周期を直接計算により求める手法であり，次元に無関係に適用できるものである．実際，この手法により得られた具体例は既知の具体例とは異なる性質をみたすものであり，従来の手法では現れなかった研究対象である.しかし,この手法での最大の障害は周期条件でありこれを解決する上での明確な定式化はなされていないことから，周期条件を実用的に解明することが重要である.

次に周期的極小曲面全体のモジュライ空間における研究について述べるが，これに関してはArezzo-Pirolaによる小平-Spencerの変形理論を用いた研究が知られている.曲面にはRiemann面の構造を入れているのでこれらをTorelli空間上でパラメトライズし，曲面上の1-cycleによるsymplectic基底を考えることによって定義されるTorelli空間上の周期写像の単射性を考える(無限小Torelli問題).上記の周期条件とモジュライ理論における周期写像とは大きく関わるものであり,Torelli問題を通して周期条件を考えるというのがArezzo-Pirolaの手法である.事実,Torelli問題が解決できるような特殊なモジュライ空間の連結成分を用いて周期条件を解決し極小曲面の存在定理が与えられている．しかし，全ての極小曲面のモジュライ空間を記述できているわけではなく，筆者によりArezzo-Pirolaによって発見されたモジュライ空間の連結成分以外の連結成分が発見されている．また,Torelli問題が解決しにくい状況は除外されている．例えば超楕円型極小曲面全体のモジュライ空間に関しては種数が奇数の場合しか考察されておらず,種数が偶数の場合は全く研究がなされていない．このことから,Torelli問題が解決しにくいようなモジュライ空間の連結成分において，どのようにして周期条件を解決していくかが重要になる.

平坦トーラス内のコンパクト極小曲面のモジュライ理論とコンパクトRiemann面のモジュライ空間とは密接な関係がある．事実，n次元平坦トーラス内のコンパクト極小曲面$f: M \to T^n$はJacobi多様体Jac(M)を経由する，即ち，トーラス間の準同型 $h: \mathrm{Jac}(M) \to T^n$ で $f = h \circ j$ となるものが存在する(ここで j はJacobi多様体への正則埋め込みであるAbel-Jacobi写像を表す).つまり極小曲面はAbel-Jacobi写像の実n次元部分をつかさどり，n次元内にwell-definedに定義できることを保証するのが周期条件である．Abel-Jacobi写像はRiemann面のモジュライ理論における重要な研究対象であることから平坦トーラス内の極小曲面のモジュライ空間はRiemann面のモジュライ空間の実の情報を引き出すことが予想される．上に述べたようなモジュライ理論における研究手段は複素幾何学による手法であり，非常に有力ではあるが実の情報を全て除外した手法である．実際，超楕円型Riemann面に関しては種数が偶数のものはどのような3次元平坦トーラスにも極小はめ込みできないという位相的な障害が知られているが，この結果は特殊なSpin構造の存在性から導かれることから複素の情報のみによって導かれる．しかし，これの高余次元ヴァージョンである4次元平坦トーラス内の超楕円型極小曲面の存在に関しては同じ議論ができず，周期条件の詳細を調べなければその存在すら示すことができない．このことから，本研究では周期条件をより深く研究することを通して，極小曲面における実の情報を全て与えることを旨とするものである.

周期条件を調べるにあたって様々な具体例を計算してみると，周期条件をみたすみたさないに関わらずRiemann面の双正則同

型によって周期が全て記述できる場合が圧倒的に多い．これは前述の通りRiemann面に適当な対称性を与えなければ周期を具体的に計算できないことからの帰結であるが，この対称性がそのまま周期条件に影響を与える．即ち，Riemann面間の双正則同型と周期条件とに何らかの相関関係があることが推測される．これは方程式論におけるガロア理論と類似するものであり，Riemann面の周期の情報が定義する何らかの”ガロア群”が”可解になる”という現象で説明できることが予想され，これを解明することにより周期条件が応用しやすい形になることが期待される．

３．研究の方法

まずコンパクトRiemann面を以下で述べる d -gonalityによって類別し，特殊な d に対するRiemann面の具体例を周期計算によって構成することから始める予定であった．一般に，コンパクトRiemann面は球面の分岐被覆の構造をもつが，このような分岐被覆の次数の最小値を d とし d -gonalなRiemann面という．特に $d=2$ の場合が超楕円型Riemann面であり，$d>2$ の場合が非超楕円型Riemann面である．最初の課題としては種数が偶数であるような *4* 次元平坦トーラス内の超楕円型極小曲面の具体例を考える．従来の構成法は *3* 次元平坦トーラス内の超楕円型極小曲面を適当な *4* 次元平坦トーラスに変形するというものであるが，種数が偶数となるような *3* 次元平坦トーラス内の超楕円型極小曲面は存在しないことからこの問題は大きな未解決問題の一つである．種数が２の場合はJacobi多様体への正則埋め込みになるので自明であることから種数が４以上の場合を取り扱う．Riemann面としては適度な対称性をもつものを考え，周期条件を解決できない場合はその原因をまとめる．考えられうる原因としては，種数が偶数であることによって限定される正則微分の次数がRiemann面の対称性と何らかのギャップを起こすことがあげられる．そのギャップを考察することを通して周期のガロア理論的な対称性を見出すという計画であった．

次に非超楕円型Riemann面における周期の研究に着手する予定であった．最初のステップとして $d=3$ の場合，即ちtrigonal Riemann面を取り扱う．trigonal極小曲面は超楕円型極小曲面に類似した性質がある．事実，筆者によって*3* 次元平坦トーラス内のtrigonal極小曲面における種数は 3を法として 1 になることが示されている．つまり超楕円型極小曲面に対する位相的障害と同じ現象がtrigonal極小曲面に対して成り立つのである．よって超楕円型極小曲面の周期に関するガロア理論が応用できる可能性がある．現在，*3* 次元平坦トーラス内のtrigonal極小曲面の具体例は筆者による種数4 のものとSchoenによる種数10 のものが知られているが，種数が7　のものは知られていない．上記のtrigonal極小曲面における位相的障害は周期の情報は一切用いずに示すことができることから，周期の情報を加味すれば種数がさらに限定される可能性がある．さらに，一般の非超楕円型極小曲面に対する周期条件におけるガロア理論を考えるという計画であった．

４．研究成果

まず４次元平坦トーラス内の種数が偶数なる超楕円型極小曲面の構成を試みた．しかし具体的に種数が４の場合を色々と計算してみたものの，結局，４次元平坦トーラスへの極小曲面を構成することができなかった．そこで非超楕円型極小曲面の具体例の構成を試みた．種数が４の trigonal 極小曲面の具体例でJacobi多様体を計算し，８次元平坦トーラスへの極小曲面のみでなく，６次元平坦トーラスへの極小はめ込みなど，様々な次元の平坦トーラスへの極小曲面の族を構成することができた．この研究内容は研究論文として海外雑誌に掲載される運びとなった．

その後，極小曲面のモジュライ空間の研究に着手することとなり，研究を積み重ねていくうちに，ガロア理論の観点からの視点ではなく，面積関数の第２変分から定義されるindex を用いたモジュライ理論を進展させることとなった．極小曲面は面積関数の臨界点であるが，この面積関数にMorse理論を適用して，面積関数の第２変分の０固有値の個数であるnullityおよび負の固有値の個数である index が定義される．index は面積関数においてその極小曲面がとる値よりも小さい値をとるような変形の個数を示しており，与えられた極小曲面が面積最小からどれだけ離れているかを見る量である．

極小曲面の index はSimonsによって1968年に導入された概念であるが，具体例の計算方法が進展したのは 1990 年代であり，Montiel-Ros，江尻-小谷，Ross，納谷らによる研究が知られている．しかし，この 20 年間，具体例の index および nullity が計算されたという研究結果は皆無に等しく，前述した具体例の変形族の index や nullity も知られていない現状である．また，極小曲面全体のモジュライ空間の研究も，変形理論を用いた先行研究ではnullityの情報のみを取り入れた理論しか確立されておらず，index という微分幾何学的な情報を含めた理論の進展は見られなかった．このようなことから，index も加味した極小曲面のモジュライ理論を確立するということも重要な課題ではあったのであるが，非常に難しい内容で今回の研究テーマの次のステップとするつもりで

あった．
　しかし，2 年前にふとしたことで名城大学の江尻典雄氏との共同研究が始まり，これまで知られていなかった極小曲面の族の index および nullity を計算することに成功した．さらに，こうした族に含まれる極小曲面の中で，自身が囲う体積が一定となるような変分に対して面積関数の第二変分が 0 以上になる(以後，この性質を体積保存安定性と云う)ものを分類することにも成功した．3 次元 Euclid 空間内の閉曲面で体積保存安定性を満たすようなものは球面に限ることが知られており，これがシャボン玉が球面であることの数学的理由である．このように，自然現象は体積保存安定性によって記述される場合があり，物理において研究されてきた極小曲面の変形族の体積保存安定性を調べることにより，自然現象に見られる変形を数学的に記述できると推測される．
　以上のように，最終的には極小曲面のガロア理論の研究から Morse index を用いたモジュライ理論の研究へと方向転換することになったのであるが，非常に大きな成果を残すこととなり，次の研究課題へと移行することができた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）
(査読付)
T. Shoda, An example of Jacobian variety and its applications to minimal surfaces, Results in Mathematics 56(2009), 23-39

〔学会発表〕（計　9　件）
①庄田敏宏,「ユークリッド空間内の周期的極小曲面における Morse index について」, 曲面論小研究集会，東京工業大学，2012 年 3 月 19 日．
②庄田敏宏,「Morse index による極小曲面のモジュライ理論(江尻理論)について」，名城大学研究集会「極小曲面と幾何構造」，名城大学，2012 年 3 月 6 日．
③庄田敏宏,「3 次元平坦トーラス内の極小曲面の index について」，第 58 回幾何学シンポジウム・基調講演，山口大学，2011 年 8 月 27 日．
④T. Shoda,「On index and nullity of triply periodic minimal surfaces」, Spanish-Japanese workshop on Differential Geometry, Granada University, 2011.2.14.
⑤庄田敏宏,「周期的極小曲面の諸性質について」，第 57 回幾何学シンポジウム，神戸大学，2010 年 8 月 7 日．
⑥庄田敏宏,「R^3 内の周期的極小曲面の縮約可能性について」第 121 回日本数学会九州支部例会特別講演,佐賀大学,2009 年 10 月 17 日．
⑦庄田敏宏,「3 次元平坦トーラス内の極小曲面について」，名城大学研究集会「幾何構造の諸相」，名城大学，2009 年 3 月 11 日．
⑧T. Shoda,「On triply periodic minimal surfaces in R^3」, Integrable systems, Geometry and Visualization 2008, Kyushu University, 2008. 12.12.
⑨庄田敏宏,「Euclid 空間内の極小曲面について」，第 55 回幾何学シンポジウム，弘前大学，2008 年 8 月 23 日．

〔図書〕（計　1　件）
庄田敏宏,「集合・位相に親しむ」現代数学社，2010 年，175 頁

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://extwww.cc.saga-u.ac.jp/~tshoda/shoda-home-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
　庄田　敏宏（SHODA　TOSHIHIRO）
　佐賀大学・文化教育学部・准教授
　研究者番号：10432957

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者
　なし