

機関番号：11101

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740045

研究課題名（和文）定曲率空間内の曲面の可積分系の理論による構成的研究

研究課題名（英文）A construction of surfaces in spaces of constant curvature via integrable system method

研究代表者

小林 真平（KOBAYASHI SINPEI）

弘前大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：40408654

研究成果の概要（和文）：平均曲率一定曲面の複素化として複素平均曲率一定曲面を定め、その実形として種々の定曲率空間内の平均曲率一定曲面・ガウス曲率一定曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式を導いた。また個別の曲面の構成・性質を解明した。また複素射影空間への同変調和写像に対してポテンシャルと呼ばれる行列値1形式を用いて特徴付けを与え、構成法を与えた。

研究成果の概要（英文）：We defined complex constant mean curvature surfaces by a natural generalization of constant mean curvature surfaces in Euclidean three space and classified real form surfaces, such as constant mean curvature or constant Gauss curvature surfaces in spaces of constant curvature, for a complex constant mean curvature surface. We also characterized equivariant harmonic maps in complex projective spaces via potentials, which are matrix valued 1-forms. Moreover, a construction method of equivariant harmonic maps in complex projective spaces has been obtained from the potentials.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：平均曲率一定曲面・ループ群・可積分系・線形常微分方程式

## 1. 研究開始当初の背景

1990年代以降、可積分系の理論を用いたリーマン面から対称空間への調和写像の研究は飛躍的な発展をしてきた。ユークリッド空間の平均曲率一定曲面のガウス写像（単位法ベクトル場）が2次元球面への調和写像であることから曲面論にも適応され、さまざま

な数学者によって重要な貢献がなされてきた（特にピンカール・スターリングの研究が可積分系の理論の曲面論への応用の端緒とされる）。また、可積分系の理論は古典的に知られている、正則関数と有型関数の組を用いた極小曲面のエネパー・ワイエルシュトラスの表現公式を平均曲率一定曲面（ここで

は平均曲率は零でないとする)へのワイエルシュトラス型の表現公式へと一般化する事も可能にした(ドルフマイスター・ペディット・ウーの結果)。ワイエルシュトラス型の表現公式においては、正則関数と有理型関数の組を係数が有理型関数である線形常微分方程式に置き換える必要がある。係数行列からなる1形式はポテンシャルと呼ばれ曲面の構成には欠かせない。このドルフマイスター・ペディット・ウーによるワイエルシュトラス型の表現公式を用いた平均曲率一定曲面の具体的な構成において、パラメータを含んだ2階の線形常微分方程式の理論とそのモノドロミー群の挙動がもっとも重要である。複素領域の線形常微分方程式については古くから著名な研究者によって研究がなされており、多大な蓄積が存在し、いまだ活発に研究されている。曲面の理論は、直接的には非線形偏微分方程式の研究と密接に関係があるが、このようにパラメータ込みの線形常微分方程式と対応が付くという事は非常に珍しい事であり興味深い。

このような可積分系の理論がうまく適応できる平均曲率一定曲面等の背後には、無限次元の対称性(ループ群)が隠れており、このような無限次元対称性をもつ曲面は可積分曲面と呼ばれる。これら可積分曲面の大域的な研究は近年の可積分系の理論の発展と相まって活発な研究が行われている。特に3次元のユークリッド空間、球面、双曲空間内の可積分曲面に対しての研究の深化は大きい。

一方ユークリッド空間以外の定曲率空間やミンコフスキー空間の極小(極大)曲面や平均曲率一定曲面等のワイエルシュトラス型の表現公式についての研究はそれほど多くなされていないという状況であった。その理由の多くは、ミンコフスキー空間等の正定値でない空間では、一般的に曲面に特異点が生じる。したがってその事も考慮にいれた研究が必要であり長らく進展を見なかった。

## 2. 研究の目的

ユークリッド空間の平均曲率一定曲面を可積分系の理論を用いた構成という観点で考察すると、複素平均曲率一定曲面が自然に現れてくる(ドルフマイスター氏とペディット氏との共同研究)。この複素平均曲率一定曲面は可積分系の理論、つまりループ群を用いた定式化を持つという特徴がある。

そこで複素平均曲率一定曲面について何ら

かの意味での実形を種々の定曲率空間内に実現し、それらの統一的構成法やその相互関係を明らかにするという事を研究の目的とした。複素平均曲率一定曲面のワイエルシュトラス型の表現公式を考える事によって、可積分曲面の間の関係がポテンシャルの間の関係として実現され、これは可積分曲面の新しい例の構成、分類において重要である。

また、複素平均曲率一定曲面は2つの正則零曲線(holomorphic null curve)で構成されており、それぞれの正則零曲線は極小曲面と対応する。従って複素平均曲率一定曲面を調べるという事自体非常に興味深い。

## 3. 研究の方法

複素平均曲率一定曲面の性質を調べる事を出発点とした。この曲面の動標構による接続形式から定まる曲率は平坦一径数族を持つという著しい性質を持つ。この事に着目すると、自然にループ環に値を持つ接続形式を考える事となる。このループ環は  $A_1^*(1)$  のアフィン・リー環(正確には中心拡大)と呼ばれる。アフィン・リー環の実形の分類は代数学者により知られており、この結果を援用する事を考えた。

またワイエルシュトラス型の表現公式を用いた曲面の具体例の構成については、線形常微分方程式の解の大域的挙動、つまりモノドロミー群について調べる必要がある。一般の線形常微分方程式についてのモノドロミー群の解析は非常に難しく、わかっていない事も多いが、特殊な場合には良くわかっている。特に三つの確定特異点を持つ場合、つまりガウスの超幾何微分方程式は詳細な研究がなされており、モノドロミー群を具体的に書き下す事ができる。そこで、ガウスの超幾何微分方程式を例に取り具体例の構成を試みた。

## 4. 研究成果

(1)ドルフマイスター氏とペディット氏との共同研究の成果として複素平均曲率一定曲面の一般論に関する論文を纏めた。この論文では、ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面を複素化するという事を通して複素平均曲率一定曲面を定式化しその性質を調べた。その結果、複素平均曲率一定曲面が2つの正則零曲線で構成されるという事を見出した。正則零曲線は極小曲面と対応しており、この事から極小曲面と平均曲率一定曲面を複素平均曲率一定曲面を通して対応づける事ができた。また複素平均曲率一定曲面の平

行曲面として複素ガウス曲率一定曲面が得られた。

(2) 複素平均曲率一定曲面の実形として得られる曲面をアフィン・カツ・ムーディー・リー環の実形の分類を用いて決定した。結果として、7つの曲面の族が得られた。これらの曲面はガウス写像が対称空間もしくは4対称空間への調和写像を持つという事で特徴付けられる。特に双曲空間内の極小曲面が実形の1つとして得られた事は特筆すべき事である。

(3) ドルフマイスター氏と井ノ口氏との共同研究の成果として、双曲空間内の平均曲率一定曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式の導出に成功した。平均曲率が0以上1未満、1より大きいという場合によって曲面の性質は大きく異なる。平均曲率が0以上1未満に対する曲面の幾何学的性質の解明や特徴付けができた事が最大の成果である。双曲空間の場合は、単位法ベクトル場をガウス写像とするのではなく、曲面との組である一般化ガウス写像を考える事が鍵となる。この写像は4対称空間へのルジャンドル写像でありさらに調和写像になっている。一般の4対称空間への調和写像は、可積分系の理論では扱えるとは限らないが、良いゲージをとる事により一般化ガウス写像を原始写像(primitive map)に変形する事ができる。この原始写像は  $k(k>2)$  対称空間への調和写像の特別な調和写像であり、可積分系の理論が適応できる対象である。また良いゲージの幾何学的意味は、Lawson 対応と呼ばれる曲面の等長変形である事も見出した。

(4) (3) で述べた双曲空間内の極小曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式とガウスの超幾何微分方程式を用いて具体例を構成する事ができた。ガウスの超幾何微分方程式のモノドロミー群を共役類の中で実形に対応する群の部分群にするという事が必要になる。この事は微分方程式の指数の間の不等式と同値となり、実際そのような不等式を満たす指数の連続の族を見つけた。

(5) リーマン面から対称空間への調和写像の中でコンパクトかつ種数0(球面)の調和写像は基本的でありウーレンバック等によって良く研究されて来た。また同変な調和写像も基本的である。複素射影空間への同変調和写像をポテンシャルと呼ばれる行列値1形式で特徴付け、構成法を与えた。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計5件)

① Josef Dorfmeister, Jun-ichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop groups, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 印刷中.

② Shimpei Kobayashi, Real forms of complex surfaces of constant mean curvature, Transactions of the American Mathematical Society, 363 (2011), 1765 – 1788.

③ Shimpei Kobayashi, Totally symmetric surfaces of constant mean curvature in hyperbolic 3-space, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 82 (2010), 240 – 253.

④ Josef Dorfmeister, Shimpei Kobayashi and Franz Pedit, Complex surfaces of constant mean curvature fibered by minimal surfaces, Hokkaido Mathematical Journal, 39 (2010), 1 – 55.

⑤ Shimpei Kobayashi, Note on equivariant harmonic maps in complex projective spaces, Annals of Global Analysis and Geometry, 36 (2009), 375 – 380.

[学会発表] (計8件)

① 小林真平, Constant Gauss Curvature Cylinders, Submanifold Geometry and Lie Group Actions, 2010年9月9日, 東京理科大学

② Shimpei Kobayashi, Dressing action on complex CMC surfaces and real forms, Oberseminar Differentialgeometrie, 2010年7月2日, Universitat Augsburg

③ Shimpei Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in  $H^3$  via integrable system methods, Progress in Surface Theory, 2010年5月6日, Oberwolfach Mathematical Institute

④ 小林真平, Global solutions of elliptic (G, rho)-systems, New aspects of surface theory, 2009年5月15日, 東京都立大学

⑤ 小林真平, Surveys of integrable surfaces, GEOSOCK Seminar, 2009年5月13日, 大阪市立大学

⑥ 小林真平, Harmonic trinoids in complex projective spaces, Fusion of Integrable Systems and Geometry, 2009年4月19日, 東北大学

⑦ 小林真平, 複素平均曲率一定曲面と実形, 日本数学会, 2009年3月28日, 東京大学

⑧ Shimpei Kobayashi, Harmonic trinoids in complex projective spaces, Integrable systems, Geometry and Visualization 2008, 2008年12月12日, 九州大学

[その他]

ホームページ等

<http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~shimpei>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小林 真平 (KOBAYASHI SINPEI)

弘前大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 40408654