

機関番号：13301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740046

研究課題名（和文） 4次元リーマン多様体内の曲面のツイスターリフトを用いた研究

研究課題名（英文） Research of surfaces in four-dimensional Riemannian manifolds using their twistor lifts

研究代表者

長谷川 和志 (HASEGAWA KAZUYUKI)

金沢大学・学校教育系・准教授

研究者番号：50349825

研究成果の概要（和文）：外空間が自己双対アインシュタイン多様体で、ツイスターリフトが調和切断となる種数0の曲面を分類した。この結果等を用いて、ツイスター正則な曲面全体を外空間の共形変換でうつりあうもの同士を同一視した空間に関して、特別な場合には、分類を得ることができた。また、外の空間が非負のスカラー曲率をもつ自己双対アインシュタイン多様体の場合、ツイスター正則な曲面のツイスターリフトが弱安定な調和切断であることが分かった。一方、外空間が4次元ユークリッド空間の場合は、そのような曲面はツイスター正則な曲面に限ることを示した。

研究成果の概要（英文）：We classify surfaces of genus zero in self-dual Einstein manifolds whose twistor lifts are harmonic sections. Using this result, we obtain a classification for the quotient space of the space of all twistor holomorphic surfaces by conformal transformations in the special case. Moreover we show that twistor lifts of twistor holomorphic surfaces are weakly stable as harmonic sections if ambient spaces are self-dual Einstein manifolds of non-negative scalar curvature. Conversely, if the ambient space is Euclidean space, a surface whose twistor lift is a weakly stable harmonic section is twistor holomorphic.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ツイスター空間, ツイスターリフト, 調和切断

1. 研究開始当初の背景

4次元リーマン多様体内の曲面において、そのツイスターリフトが水平となるものや、正則となるものは、それぞれ、超極小曲面、ツイスター正則な曲面とよばれ多くの研究がなされている。当研究では、これらより一般のツイスターリフトが調和切断となる曲面の研究を行った。

2. 研究の目的

4次元リーマン多様体内の曲面のツイスターリフトを用いて、以下について研究を行うことを目的とした：

- (1) ツイスター正則な曲面の構成,
- (2) ツイスター正則な曲面全体を外空間の共形変換でうつりあうもの同士を同一視した空間の決定,
- (3) ツイスター正則な曲面のツイスターリフトの調和切断としての安定性,
- (4) ツイスターリフトが弱安定な調和切断となる曲面の決定,
- (5) 平行な平均曲率ベクトル場を持つ曲面のツイスター空間を用いた構成.

3. 研究の方法

外空間が自己双対アインシュタイン多様体で、ツイスターリフトが調和切断となる曲面において、正則2次微分を構成し、種数が0の場合には、それが消えることを用いて、そのような曲面の分類を行った。さらに、この結果も合わせて、ツイスターリフトの代数的諸量に着目し、ツイスター正則な曲面全体

を外空間の共形変換でうつりあうもの同士を同一視した空間に関して研究を行った。

また、安定性については、研究代表者によってすでに得られている結果等を用いて、第二変分公式を計算した。外空間が4次元ユークリッド空間の場合には、ツイスター空間が自明束であることも用いて、弱安定な調和切断を持つ曲面の研究を行った。

4. 研究成果

まず、外空間が自己双対アインシュタイン多様体で曲面の種数が0の場合に、ツイスターリフトが調和切断ならば、法束のオイラー数に応じて、曲面はツイスター正則かまたは極小であることが分かった。これを用いて、

(1) については、曲面のツイスター正則性の外空間の共形不変性および3次元複素射影空間内の正則曲線を用い、4次元ユークリッド空間内のツイスター正則な曲面についていくつかの結果を得た。(1)の研究結果と上記の結果も用いて、(2)のツイスター正則な曲面全体を外空間の共形変換でうつりあうもの同士を同一視した空間に関して、特別な場合には、分類を得ることができた。また、ツイスター正則な曲面に関して、外空間がユークリッド空間ではない場合に、4次元ユークリッド空間の場合とは異なる様相を示す例が見つかった。これにより、この問題は外空間の性質が大きく依存していることが予想されるが、その解明は今後の課題としたい

(3)、(4)に関しては、外の空間が非負のスカラー曲率をもつ自己双対アインシュタイン多様体の場合、ツイスター正則な曲面のツイスターリフトが弱安定な調和切断で

あることが分かった。これは、平行ではない切断で弱安定な調和切断となるものの例を与えるが、これまで知られている例でそのようなものはあまり多くはないと思われる。逆に、外空間が4次元ユークリッド空間の場合は、そのような曲面はツイスター正則な曲面に限ることが分かった。

(5) については、ツイスター空間を低空間とするファイバー束を考え、その全空間へのある種の写像を構成することにより、平行な平均曲率ベクトル場を持つ曲面を構成したいと考えた。局所的にはいくつかの例を得たが、大域的なものやその特徴づけに関しては未解決なので、今後も引く続き研究を行っていく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① K. Hasegawa, Surfaces in four-dimensional hyperkaehler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 309-317. 査読有.
- ② 長谷川和志, Surfaces in hyperkaehler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」報告集(2010). 査読無.
- ③ K. Hasegawa, On surfaces of low genus whose twistor lifts are harmonic sections, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 17 (2010), 35-43. 査読有.
- ④ K. Hasegawa, Stability of twistor lifts for surfaces in

four-dimensional manifolds as harmonic sections, J. Geom. Phys., 59 (2009), 1326-1338. 査読有.

- ⑤ N. Abe and K. Hasegawa, A generalization of Cartan's identities for isoparametric hypersurfaces and its applications, Result. Math., 52(2008), 197-210. 査読有.

[学会発表] (計5件)

- ① K. Hasegawa, Surfaces of genus zero in self-dual Einstein manifolds and their twistor lifts, International Conference "Differential Geometry and its Applications", ブルノ (チェコ), 2010年8月28日.
- ② 長谷川和志, Surfaces in hyperkaehler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」, 東京理科大学森戸記念館 (東京都), 2009年9月8日.
- ③ 長谷川和志, Surfaces in four-dimensional Euclidean space whose twistor lifts are harmonic sections, 日本数学会秋季総合分科会幾何学学科会, 大阪大学 (大阪府), 2009年9月2日.
- ④ K. Hasegawa, On low genus surfaces whose twistor lifts are harmonic sections, The 11th International Conference "Geometry, Integrability and Quantization", バルナ (ブルガリア), 2009年6月5日.
- ⑤ 長谷川和志, On low genus surfaces whose twistor lifts are harmonic sections, 日本数学会2009年度年会, 東京大学, 2009年3月26日.

[その他]

ホームページ等

[http://www.ed.kanazawa-u.ac.jp/~kazuhas
e/](http://www.ed.kanazawa-u.ac.jp/~kazuhas
e/)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長谷川 和志 (HASEGAWA KAZUYUKI)

金沢大学・学校教育系・准教授

研究者番号：50349825

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし