

機関番号：34412

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740047

研究課題名(和文) 結び目の幾何と不変量の実現問題及びその仮想化の研究

研究課題名(英文) Studies on geometric properties and realization problems of invariants for classical knots and virtual knots

研究代表者

中村 拓司 (NAKAMURA TAKUJI)

大阪電気通信大学・工学部・准教授

研究者番号：60382024

研究成果の概要(和文)：本研究においては主に結び目の局所変形を視点とし、結び目の幾何的性質、代数的性質の実現問題やそれらの関連性の研究に関して成果をあげた。具体的には、任意の周期 p を実現する C_n 変形一回で解ける周期的結び目の構成、シャープ変形一回で解ける合成結び目の実現、Alexander多項式の実現などに関し成果をあげた。また仮想結び目に関してJones多項式の拡張であるMiyazawa多項式に対し、自明なMiyazawa多項式を実現する非自明な仮想結び目の構成を行った。

研究成果の概要(英文)： In this studies, we obtain several results about realizations for geometric or algebraic properties of knots and related topics from a view of local moves for knots. In fact, we construct p -periodic knots with C_n unknotting number one for any period p . We also construct composite knots with # unknotting number one. Moreover, we obtain some partial answers for a realization problem of Alexander polynomials for # unknotting number one knots. On the other hand, we construct non-classical virtual knots with the trivial Miyazawa polynomial, which is a generalization of Jones polynomial.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1040,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目, Alexander多項式, ファイバー結び目, C_n 変形, 仮想結び目, Miyazawa多項式, シャープ変形

1. 研究開始当初の背景

3次元球面内の結び目に対し、結び目理論では「与えられた2つの結び目が同値かどうか判定せよ」という分類問題が最も基本的な問題であり、このために様々な不変量が開発されてきた。一般に不変量を一つ固定したとき、その値が実際に結び目の不変量となるための必要条件が与えられることが多い。逆に

その条件が十分であるか、つまり、結び目全体の集合から結び目の不変量がとりうる値の集合へ全射があるかという問題がある。与えられた不変量に対し、それを実際に不変量として持つ結び目を構成することを実現問題という。この解決を目指す際に構成する結び目に幾何的性質や代数的性質で制限を付けることで、その不変量と幾何的性質、代数

的性質の関連性を明らかにすることができ
る．近年，量子不変量やホモロジーに根ざ
した不変量など様々なものが開発されて
いるが，古くからある Alexander 多項
式の実現問題に関しても多くの問題があ
る．また近年さかんに研究されている
仮想結び目に対して実現問題は課題と
なっている．

2. 研究の目的

本研究の目的は，与えられた結び目の代
数的不変量を，実際に結び目を構成し
て実現するという不変量の実現問題と，
それに対する，結び目の幾何的性質の
影響を明らかにすることである．また，
これらを仮想結び目に対して拡張する
ことも目的である．

(1) 結び目の幾何，補空間の位相構造と Alexander 多項式の実現問題の研究

結び目 K の (正規化された) Alexander 多
項式 $\Delta_K(t)$ は $\Delta_K(1)=1$ と $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ という 2
つの性質を持つ．逆に，これらの性質を
持つローラン多項式に対して，それを
Alexander 多項式を持つ結び目が存在
することが知られている．また，そのよ
うな結び目がトンネル数 1 の結び目
で構成されることが示されている．
ファイバー結び目の Alexander 多項
式は上記の 2 つの性質に加えて，「最
大次数が ± 1 」と「最大次数が結び
目の種数に一致する」という性質を持
つ．これらの性質を持つローラン多項
式に対しても，それを Alexander 多項
式を持つファイバー結び目が存在する
．本研究では，トンネル数 1 のファイ
バー結び目による Alexander 多項式
の実現問題の解決を考えている．この
研究は，「Dehn 手術でレンズ空間を
産む結び目の特徴付け」に関連して
いる．Berge によりレンズ空間を産
む結び目のリストが作成され，そのリ
ストが完全であると予想されている．
そのリストの結び目はトンネル数 1
のファイバー結び目であり，その Alex
ander 多項式の特徴も知られている．
それとは別に「レンズ空間を産む」と
いう条件から Ozsvath-Szabo は knot
Floer Homology 理論を用いて同様の
Alexander 多項式の特徴を見出してい
る．本研究でトンネル数 1 のファイバ
ー結び目で任意の Alexander 多項式
が実現されることが得られた場合，
Ozsvath-Szabo などにより得られた
特徴は「レンズ空間を産む」という性
質がより本質的に効いていると考えら
れる．

結び目の幾何との関連では，結び目解
消数 1 の結び目で任意の Alexander
多項式が実現されることの拡張として，
一般化された結び目解消操作 1 回で
解ける結び目での実現問題を考えて
いる．具体的にはシャープ変形やパス
変形を考える．

(2) 仮想結び目の幾何，多項式不変量 の開発と実現問題の研究

結び目のダイアグラムの交点には一般
に正と負の 2 種類が現れる．これらに
加え，「仮想的な交点」を考えたダイ
アグラムを仮想結び目ダイアグラムと
いい，一般化されたライデマイスター
変形によるそれらの同値類を仮想結
び目という．結び目群，Jones 多項
式などが自然に拡張されている．本研
究ではそれらの実現問題を考える．特
に Jones 多項式の拡張である Miyazawa
多項式に関してその実現を行う．また
仮想結び目は自然に閉曲面 Σ に厚
みをつけた多様体 $\Sigma \times I$ 内の結
び目と解釈でき，その意味で 3 次元
球面内の結び目の一般化と考えられ
る．仮想結び目の 3 次元位相幾何的
な性質を捉え，そこから「補空間」
を通した多項式不変量の開発，及びそ
の実現問題の研究も目的とする．

3. 研究の方法

本研究では，主に Alexander 多項式
の実現問題を考えるが，いくつか存在
が知られている任意の Alexander 多
項式を導き出す Seifert 行列に対
して，それを持つ Seifert 曲面を構
成し，結び目を作るという手法を取
る．1 つの Seifert 行列から構成さ
れる Seifert 曲面は数多くあるが，そ
こに幾何的性質を反映させるような
構成を行う．また，幾何的性質を反
映させるように Seifert 行列自体を
考えることも必要である．以上のよ
うな研究手法では，大量の計算実験
が必要であり，この計算実験により
実現できない場合の障害も見えてく
ると考えている．

トンネル数 1 のファイバー結び目
での Alexander 多項式の実現問題
の解決にはトンネル数 1 とファイバ
ー結び目であるという 2 つの幾何
的条件を同時に与えることが解決
の糸口であると考えられる．トン
ネル数 1 の結び目からのアプローチ
では，Fujii が構成した任意の Alex
ander 多項式を実現するトンネル
数 1 の結び目がファイバー結び目
であるかどうかを判定する．一般に
与えられた結び目がファイバー結
び目であるかどうかの判定は技術
的に困難であるが，代数的には結
び目群の交換子群が有限生成であ
ること，幾何的には縫い目付き多
様体理論を使い示していく．また，
他の幾何的なアプローチとしては，
トンネル数 1 を保持したまま，実
際に Fujii の結び目が張る Seifert
曲面を変形して，ファイバー曲面
にしていくことを考えている．こ
れには Alexander 多項式が等しい
2 つの結び目は二重化デルタ変形
で移り合うという結果を用いる．
ファイバー結び目からのアプロ
ーチでは，申請者が構成した任意
の Alexander 多項式を実現する
ファイバー結び目がトンネル数 1
かどうかを判定する．トン

ネル数が1でないことの判定には量子不変量を用いることを考えている。また、トンネル数1でない場合はファイバー性を保持したまま、トンネル数1の結び目への変形を試みる。これらの幾何的なアプローチでは種数が小さい結び目など、単純なものを扱う。そこで構成された結び目に対して、コンピュータで計算実験を行い、Seifert 行列の特徴を見出しながらか一般化し、任意の Alexander 多項式を実現する結び目を構成する。実現できない場合はトンネル数1のファイバー結び目の Alexander 多項式は特別な性質を持つはずなので、計算実験を通してそれを発見する。

一方、一般化された結び目解消操作（シャープ変形やパス変形）1回で解ける結び目での実現問題にも取り組む。まずは幾何的にアプローチする。これらの結び目解消操作1回で解けることを局所的なタングルで捉え、その外部に対して申請者がこれまでの研究で構成した任意の Alexander 多項式を実現する結び目を「つなぐ」ことによって結び目を構成し、ここでも計算実験によって Seifert 行列の特徴を見出しながらか、任意の Alexander 多項式を実現する結び目を構成していく。

仮想結び目の研究では拡張された Jones 多項式の実現を行う。与えられた仮想結び目の Jones 多項式の計算に関してはステイト和によるものかスケイン関係式を用いたものが主であり、これを用いて実現問題を考える。実際に構成した仮想結び目の分類に関しては仮想結び目群や他の多項式不変量を用いる。また、仮想結び目を閉曲面 Σ に厚みをつけた多様体 $\Sigma \times I$ 内の結び目と解釈し、その意味で3次元球面内の結び目の一般化と考え、仮想結び目の3次元位相幾何的な研究を考える。Kuperberg による先駆的な仕事を踏まえ、仮想結び目に対して古典的結び目の Seifert 曲面に対応するものを導入する。仮想結び目を $\Sigma \times I$ の結び目として捉えても一般には直接曲面を張ることは出来ない。しかし $\Sigma \times I$ の結び目は Σ 上にダイアグラムを持つため古典的結び目に対する Seifert のアルゴリズムの類似を考え、そこでできた曲面を意味あるものになりたいと考えている。実際、 Σ 上にあるダイアグラムに対しチェッカーボード曲面が張れるとき、仮想結び目の良い性質を導くことが知られている。まずはサポート種数1または2の仮想結び目に対してこれらを考える。

4. 研究成果

(1) 結び目のダイアグラムの局所変形と結び目の周期の実現問題に関する研究において以下の成果を得た。

局所変形を一つ固定し、その局所変形を1回施すことで解ける結び目で、与えられた周

期を持つものが存在するか?という問題がある。その局所変形が交差交換やパス変形などの場合ではそのような周期的結び目の存在が示されている。一方デルタ変形では大きい周期に対してはそのような周期的結び目は存在しないだろうとの予想が立てられている。この問題に対し、 C_n 変形と呼ばれる局所変形を一回施すことによって解ける結び目で、与えられた周期を持つものを3以上の任意の自然数 n に対して構成した。 C_n 変形は結び目の有限型不変量との関連で定義された局所変形で、今後はこのような周期的結び目と有限型不変量の実現問題に取り組むことが課題である。また、シャープ変形と呼ばれる局所変形に対して同様の問題に取り組んだ。完全な解答は得られていないが、この変形でも大きな周期に対しては存在しないだろうという予想を立てるに至った。これまでの結果をまとめ、国際研究集会「Knots in Washington XXVII」, 「The Fifth East Asian School of Knots and Related Topics」などで口頭発表した。現在この結果は論文にまとめている。

(2) 仮想結び目の多項式不変量の実現問題に関する研究において以下の成果を得た。

仮想結び目に対し、通常結び目を古典的結び目という。古典的結び目に対する Jones 多項式はステイト和を通して、仮想結び目に対しても一般化され定義される。古典的結び目に対し、「Jones 多項式が自明である非自明な結び目は存在するか?」という現在も未解決の大問題があるが、仮想結び目ではその Jones 多項式が自明であるが非自明なものが存在する。仮想結び目の Jones 多項式をより一般化させた多項式不変量に Miyazawa 多項式がある。これは宮澤康之氏による一連の仕事の中で得られたものでここでは2008年に定義されたものとする。一般に Miyazawa 多項式は Jones 多項式よりも強力で、Jones 多項式が自明であるが Miyazawa 多項式が非自明である仮想結び目がある。(逆はない。)しかし Miyazawa 多項式が自明であるような非自明な仮想結び目も存在する。今回はこのような「Miyazawa 多項式が自明である非自明な仮想結び目」を無限個構成した。非自明性の判定には他の多項式不変量である Sawollek 多項式を用いた。また Miyazawa 多項式、Sawollek 多項式さらに仮想結び目群も自明であるような仮想結び目も存在しており、そのような仮想結び目の構成的実現が今後の課題である。この成果は日本数学会年会や国際研究集会「The Sixth East Asian School of Knots and Related Topics」などで発表し、現在、論文にまとめている。

(3) 結び目の局所変形と素性および、多項

式不変量の実現問題に関する研究において以下の成果を得た.

結び目のシャープ変形と呼ばれる局所変形に関して研究を行った. 交差交換と違いシャープ変形は施すときに, 実際に正則図の施せる場所を捉えることが非常に難しい. そこでシャープ変形一回で生成される局所変形 (5_3 -変形, 3_1 -変形など) をこれまで見つかったもの以外に新たに構成した. この中で, 2 -フルツイストを解き, さらに局所的な結び目 (3_1 や 5_1 やある種のモンテシノス結び目) を作りだす局所変形を構成し, これを利用してシャープ型結び目解消数 1 で 2 つの素な因子結び目からなる合成結び目を無限個構成した. これは坂井-村上の結果の拡張である. また, 同様に 3 つの因子結び目からなる合成結び目も無限個構成している. シャープ型結び目解消数 1 の結び目による Alexander 多項式の実現問題にも取り組んでいる. 坂井により知られている実現される Alexander 多項式の系列以外にいくつかの系列が実現されることを示した. 実現問題については完全解答は得られていないが, これの解決が今後の課題である. これらの研究は神戸大学の中西康剛氏との共同研究である. この成果は研究集会「E-KOOKセミナー2010」や国際研究集会「The 7th East Asian School of Knots and Related Topics」などで発表し, 現在, 論文にまとめている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

中村拓司, Braidzel surfaces for fibered knots with given Alexander polynomials, Kobe J. Math. 査読有, 26 巻, 2009, 17-28

[学会発表] (計 11 件)

1. 中村拓司, 結び目のシャープ変形について, 日本数学会年会 (中止により予稿集刊行にて発表扱い), 2011 年 3 月 20 日, 早稲田大学

2. 中村拓司, Notes on sharp moves for knots, 国際研究集会「The 7th East Asian School of Knots and Related Topics」, 2011 年 1 月 10 日, 広島大学

3. 中村拓司, Notes on sharp moves for knots, 研究集会「E-KOOKセミナー2010」, 2010 年 8 月 27 日, 大阪市立大学

4. 中村拓司, 自明な多項式不変量を持つ仮想結び目について, 日本数学会年会, 2010 年 3 月 26 日, 慶應義塾大学

5. 中村拓司, Notes on virtual knots and their polynomial invariants, 研究会「結び目と 3 次元多様体」, 2010 年 3 月 18 日, 慶應義塾大学

6. 中村拓司, Notes on virtual knots with trivial polynomial invariants, 国際研究集会「The Sixth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2010 年 1 月 25 日, Chern Institute of Mathematics, Nankai University

7. 中村拓司, Notes on virtual knots whose polynomial invariant is trivial, 研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology」, 2009 年 11 月 14 日, 大阪市立大学

8. 中村拓司, C_n -moves and periodic knots, 日本数学会年会, 2009 年 3 月 26 日, 東京大学

9. 中村拓司, C_n -moves and periodic knots, 国際研究集会「The Fifth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2009 年 1 月 14 日, 慶州文化会館 (韓国)

10. 中村拓司, C_n -moves and periodic knots, 国際研究集会「Knots in Washington XXVII」, 2009 年 1 月 11 日, George Washington university

11. 中村拓司, C_n -moves and periodic knots, 研究集会「北陸結び目セミナー」, 2008 年 11 月 14 日, 金沢大学サテライトキャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村 拓司 (NAKMAURA TAKUJI)
大阪電気通信大学・工学部・准教授
研究者番号 : 60382024