

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月29日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740052

研究課題名（和文） 確率制御に関連する問題における max-plus 確率論的アプローチ

研究課題名（英文） Max-plus probabilistic approach to problems related to stochastic control

研究代表者

貝瀬 秀裕 (KAISE HIDEHIRO)

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号：60377778

研究成果の概要（和文）：実数における通常の和と積を \max と和で置き換えて得られる max-plus 代数を連続時間・連続状態空間の制御問題に持ち込むことで、確率制御と決定論的制御における動的計画偏微分方程式の解の構造や値関数の特徴付けに関して max-plus 的手法に基づく新たな結果を得た。また max-plus 確率的観点により数理ファイナンスにおける最適投資や消費問題を定式化し最適値を特徴づけた。

研究成果の概要（英文）：Max-plus algebra is obtained by replacing the conventional addition and multiplication with maximum and the addition in reals, respectively. Using max-plus algebra in continuous-time and continuum-state control problems, we obtained new results on structures of solutions and characterizations of value functions for dynamic programming partial differential equations in stochastic and deterministic controls. These results are based on max-plus methodology. We also formulated optimal consumption and investment problems in mathematical finance by max-plus probabilistic point of view and characterized optimal values.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率論，確率制御，動的計画偏微分方程式，max-plus 確率，数理ファイナンス

1. 研究開始当初の背景

1950年代より max-plus 代数は離散数学や計算機科学分野において研究されていたが、連続時間・連続状態空間における問題での有用性は、1980年後半に量子力学における準古典解析にあらわれる Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の研究に関連して指摘された。その後、

連続時間・連続状態空間の決定論的制御においても max-plus 代数の基づく研究が始まり、現在にいたるまで国内外の数学者や制御分野を中心とした工学者により活発に研究が行われている。当該研究課題応募時は、決定論的制御における max-plus 的手法による研究結果が欧米の研究者により得られ始めた時期で、一方で本研究代表者による確率制御

における動的計画偏微分方程式の解の構造が明らかにされた時期と重なり，max-plus 確率を通じて確率論の概念や手法を決定論的制御に持ち込むことで新しい視点や結果を得ることを目標として研究を開始した。

2. 研究の目的

外乱やモデルの不確かさを確率論を用いず未知な決定論的な量で表現する H 無限大制御は，max-plus 確率の立場で見直すと max-plus 確率に基づく確率制御と見なすことができる。このことから，既存の確率制御や確率論のアナロジーを max-plus 確率を通じて展開することにより，H 無限大制御や決定論的制御に確率論的視点を与えることが期待できる。本研究では，H 無限大制御を含む決定論的制御において今まで見られなかった max-plus 的な視点や方法を確立し，さらに確率論や解析学などに寄与することを目的とする。

3. 研究の方法

Wentzell-Freidlin 大偏差理論を用いることで，H 無限大制御はリスク鋭感的確率制御のある種の特異極限として得られることが厳密なレベルや形式的なレベルで知られている。確率論の概念や手法を Wentzell-Freidlin 大偏差理論を通じて決定論的制御に max-plus の意味で適切に翻訳し，決定論的制御問題に対して max-plus 確率や max-plus 代数に基づいた研究を行う。主に動的計画原理に関連した問題を扱うため，制御問題に関連する非線形半群やその無限小生成作用素の解析を行い，それを確率解析や粘性解理論を用いて実行する。

4. 研究成果

リスク鋭感的制御やそのある種の特異極限を通じて得られる決定論的制御問題を max-plus 代数を通じて研究することが当該研究課題の目標であり，主に以下の研究成果を得た：

- (1) 1階エルゴード型 Bellman 方程式の解の構造
2階エルゴード型 Bellman 方程式の解の構造と分類結果を動機として，その特異極限から得られる1階エルゴード型 Bellman 方程式の粘性解も同様の構造を持つことを示した。また critical な解を max-plus 確率の概念を用いて特徴づけた。決定論的制御における動的計画偏微分方程式に対して max-plus 確率的概念が果たす役割を明らかにした新しい側面からの研究結果である。

(2) max-plus 加法的汎関数を持つ max-plus 確率制御

最適消費問題のリスク回避の極限から得られる決定論的制御問題は，max-plus 加法的汎関数を持つ max-plus 確率制御問題へと一般化できる。最適消費問題を含む新しいリスク鋭感的確率制御を一般的に定式化し，そのリスク回避の極限を max-plus 確率制御における準変分不等式を通じて特徴づけた。数理ファイナンスにおけるリスク回避の極限に現れる現象を一般的な枠組みで理解することに成功した。

また当初の研究目的には含まれていなかった確率制御における動的計画偏微分方程式の max-plus 的手法による研究にも着手し基礎的結果が得られた。決定論的制御においてなされていた max-plus 的アプローチが，確率制御においても発展することが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① W. H. Fleming, H. Kaise, S.-J. Sheu, Max-plus stochastic control and risk-sensitivity, Applied Mathematics and Optimization, 査読有, Vol.62, (2010), 81-144
- ② H. Kaise and W.M. McEneaney, Idempotent expansions for continuous-time stochastic control: compact control space, Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, 査読有, Vol.1, (2010), 7015-7020
- ③ H. Kaise and S.-J. Sheu, Ergodic type Bellman equation of first order with quadratic Hamiltonian, 査読有, Vol.59, (2009), 37-73

[学会発表] (計 9 件)

- ① H. Kaise, Partially observed H-infinity control with maximum cost, SIAM Conference on Control and its applications, 2011.7.27, Hyatt Regency Baltimore, MD, USA
- ② H. Kaise and W.M. McEneaney, Idempotent expansions for continuous-time stochastic control: algorithm and some error analysis, SIAM Conference on Control and its applications, 2011.7.25, Hyatt Regency Baltimore, MD, USA
- ③ H. Kaise and W.M. McEneaney,

- Idempotent expansions for continuous-time stochastic control: compact control space, The 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010.12.17, Hilton Atlanta, GA, USA
- ④ 貝瀬秀裕, Idempotent methods for dynamic programming PDEs in optimal control problems, 確率解析とその周辺, 2010.11.11, 岡山大学
 - ⑤ H. Kaise, H-infinity control approach to optimal investment problem under partial information, 中之島ワークショップ「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2009」, 2009.12.4, 大阪大学中之島センター
 - ⑥ H. Kaise, Nonlinear H-infinity control and its applications to mathematical finance, Mathematical Finance and Related Topics in Economics and Engineering, 2009.8.13. 関西セミナーハウス
 - ⑦ H. Kaise, Max-plus stochastic control and risk-sensitivity: general framework related with risk-averse limit of optimal consumption problem, Stochastic Analysis for and from Mathematical Finance, 2009.8.4. 京都リサーチパーク
 - ⑧ W.H. Fleming, H. Kaise and S.-J. Sheu, Max-plus stochastic control and risk-sensitivity, SIAM Conference on Control and its Applications, 2009.7.7. Colorado Convention Center, CO, USA
 - ⑨ H. Kaise, Max-plus stochastic control and risk-sensitivity, 確率論シンポジウム, 2008.12.18. 東京工業大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

貝瀬 秀裕 (KAISE HIDEHIRO)
大阪大学・基礎工学研究科・准教授
研究者番号: 60377778

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

