

機関番号：13902

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20740053

研究課題名（和文）量子確率論的手法によるフラクショナルブラウン運動の研究

研究課題名（英文）Research on Fractional Brownian Motions by the Quantum Probabilistic Method.

研究代表者

浅井 暢宏 (ASAI NOBUHIRO)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：60399029

研究成果の概要（和文）：

ボゾンフォック空間上での解析方法の一つとして有名な古典シーガル・バーグマン変換(解析)に触発され、単一モードフォック空間と付随する非ガウス型シーガル・バーグマン変換およびバーグマン測度とそれに関する二乗可積分な解析関数のヒルベルト空間の構成を行うことによって、確率変数(過程)の古典・量子対応の解明を試みた。非ガウス型バーグマン測度の構成には複素モーメント問題が本質的に関わっており、その一般的解決手法の開発は困難である。よって、本研究では、問題をマイクスナー系列および特殊なウィルソン系列の古典直交多項式に付随する場合に限定した。結果的に、幾つかの非ガウス型バーグマン測度を具体的に構成することに成功した。

研究成果の概要（英文）：

Motivated by the classical Segal-Bargmann transform in Gaussian analysis, which has been recognized as a useful way for the analysis on the Boson Fock space, we have tried to examine the classical-quantum correspondence of random variables (stochastic processes) by constructing one-mode Fock spaces and Hilbert spaces of square integrable analytic functions with respect to non-Gaussian Bargmann measures. It is essentially related to the complex moment problem for the construction of non-Gaussian Bargmann measures. Due to this reason, it would be quite difficult to develop the general way to solve our problem in a fully general form. Therefore, in this research program our consideration has been restricted to several special cases containing the Wilson's family of orthogonal polynomials under the special choice of parameters, which is in the higher hierarchy than the Meixner's family. As a result, we have succeeded to construct several non-Gaussian Bargmann measures, explicitly.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：量子確率論，無限次元解析学，シーガル・バーグマン解析

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：量子確率論，直交多項式，シーガル・バーグマン変換，変形フォック空間

## 1. 研究開始当初の背景

ガウス型量子白色雑音はボゾン生成・消滅作用素の和，ポアソン型量子白色雑音はボゾン生成・消滅作用素および個数作用素の和で表現できることが，量子確率論ではよく知られていた．また，ボゾン型の生成・消滅過程を基礎にした量子確率微分方程式の線形理論も整備されている．

一方，量子物理学では，早い時期に非線形量子雑音を含む量子確率微分方程式が現れていた．それ故に，それらを厳密に取り扱うための確率論的手法の開発が強く望まれていた．実際には，1990年頃から，イタリアのアカルディーヤルがボゾン型ではない特殊なフォック空間の概念を導入して非線形量子雑音の取り扱いにチャレンジしていた．やがて，2000年頃からは，非ガウスや非ポアソン型量子雑音やボゾン生成・消滅作用素の高次冪，およびリー代数理論との関係を模索する代数的研究が始まった．その後，二次冪とマイクスナー族の直交多項式系との関係が注目を集め始めた．

一方，浅井は1990年代後半に久保・郭と共同で行った指数型整関数の増大度による白色雑音ウルトラ超汎関数の分類研究から得た知見により，S変換と古典シーガル・バーグマン変換理論の類似性に注目していた．実際には，2000年頃からバーグマン・シーガルによる実関数表現と複素関数表現を橋渡しする積分変換（いわゆる，古典シーガル・バーグマン変換のこと）の非ガウス化に向けた研究を始めていた．この段階で，直交多項式理論が有効であることを認識していた．その後，浅井・久保・郭（2003）はガウス・ポアソン測度から古典バーグマン測度（複素ガウス測度）を，浅井（2005）の論文では，マイクスナー族から古典バーグマン測度の分散ガンマ混合測度を構成することに成功していた．

以上を背景として，フラクショナルブラウン運動や，より一般性のある直交多項式系に付随する非ガウス型バーグマン測度を具体的に構成することに興味を持った．

## 2. 研究の目的

本課題の研究期間内における目的は以下の通りとした．

- (1) 単一モードフォック空間を解析関数のなすヒルベルト空間によって実現するために，ヤコビ・セゲーパラメータに付随した複素モーメント問題を解くことで，非ガウス型バーグマン測度を構成すること．
- (2) (1)と共に，非ガウス型確率変数（過程）の変形生成・消滅作用素による量子分解

表示を得ること．

- (3) 非ガウス型バーグマン測度と複素フラクショナルブラウン運動の関係を調べること．
- (4) (2)で構成した非ガウス型バーグマン測度の一意性判定定理を得ること．
- (5) 乗法的繰り込み法 (MRM) に現れるMRM因子間の相互関係を解明すること．

## 3. 研究の方法

2で述べた研究目的を達成するためには，直交多項式系を特徴付けるヤコビ・セゲーパラメータをモーメント数列とするスティルチェス型モーメント問題を解くことが鍵となる．その際，フーリエ解析，特に，古典メルン変換理論が有効であり，その合成積定理は測度の積分表示を得るうえで最も重要である．また，場合によっては，変形ベッセル関数をはじめとする特殊関数の積分表示や，乗法的繰り込み法 (MRM) による直交多項式やそれが満たす漸化式，およびヤコビ・セゲーパラメータの計算，さらに付随する確率測度の分類作業が必要になる．この点については，MRMの共同開発者である久保・郭両氏と適宜研究打ち合わせを行い，本研究課題に対する協力を要請する．さらに，古典確率論と非可換確率論の一つである自由確率論に現れるそれぞれのレヴィー・ヒンチン公式を介した分布の対応関係（ベルコヴィッチ・パタの定理）を一般化する．

本研究課題において得られた研究成果は，国内外の関連する研究集会等で講演発表を行い，積極的に情報発信をする．また，関連する研究についての情報収集も合わせて行う．

## 4. 研究成果

(1) マイクスナー型確率変数がC上回転不変な確率測度に関して二乗可積分な解析関数空間上で働く変形生成・消滅作用素を用いて表現できることを明らかにした．これらの結果については，2008年にQP-PQから論文が出版された．

具体例として，古典バーグマン測度や，古典バーグマン測度の分散ガンマ混合測度が含まれていることは極めて重要である．

また，マイクスナー族を特徴付ける（確率変数の）量子分解の構造定数とハーストパラメータの対応関係が分かった．

(2) 本研究課題初年次に，一変数マイクスナー系列より上位にあるウィルソン系列の直

交多項式系に付随する  $C$  上確率測度が範疇に入るという感触を得た。よって、2 年次以降は、ウィルソン系列に含まれている連続双対ハーン多項式に研究対象を特化した。その結果、更なるパラメータの特殊化により、付随する非ガウス型バークマン測度を具体的に構成することに成功した。結果は国際的学術専門雑誌 IDAQP から 2009 年に出版された。その後の研究で得たより一般的な結果は、国際的学術専門雑誌に現在投稿中の論文に述べてある。しかし、これらの場合に対応する確率変数の量子分解表示はまだ得られていない。

なお、浅井・久保・郭 (2003) で得ていたバークマン測度の一意性判定定理の仮定が弱く出来ることが判明した。この一般化により、我々が構成した古典バークマン測度の分散ガンマ混合測度の一意性を示すことが出来た。しかし、判定定理の更なる改良の可否については今のところ不明である。

また、ウィルソン測度には半マイクスナー分布や半双曲余弦分布が含まれることが分かった。これらは自明なことでないことを付記する。

(3) 古典確率論と自由確率論に現れる分布の対応関係については、古典および自由それぞれのレヴィー・ヒンチン公式を介したベルコヴィッチ・パタの全単射定理が有名である。この定理を MRM 因子である指数関数  $\exp[x]$  と  $(1-x)^{\alpha}$  間の関係を介することにより一般化する課題に着手した。これにより、非ガウス型シーガル・バークマン変換理論が無限分解可能分布族に対しても構築出来るのではとの期待をしている。今後の課題である。

(4) 長年の共同研究者である久保・郭の両氏と共に、ブレンケ型母関数に付随する直交多項式および確率測度の分類についての議論を開始した。関連する先行研究はチハラ (1960) によるものが存在するが、我々の手法や目的とは異なる。我々の MRM による研究により、チハラの論文では幾つかの重要な場合分けが欠落していることに気が付き、それらを補完する必要があることが分かった。また、 $q$  変形直交多項式や超幾何級数が極めて自然な形で MRM 法の範疇に入ることが明らかになった。これらについては上記 (3) と深く関わっていると思われるため、久保・郭両氏との共同研究は本課題終了後も継続して行うことが望まれる。

(5) 本研究において得られた成果 (1) (2) については、海外の量子確率論研究者の目に留まり、チュニジア、チリ、ポーランド、韓国、仙台で開催された国際研究集会にて講演発

表する機会を定期的に得ることが出来た。これらの機会では、海外研究者達から今後の研究の方向性についての有益な助言や、関連研究の最新情報等を得ることが出来た。極めて有益であった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

### 1. Nobuhiro Asai:

The construction of subordinated probability measures on  $C$  associated with the Jacobi-Szego parameters.

Infin. Dimens. Anal, Quantum Probab. Relat. Top. **12** (2009), 401--411. (査読有)

### 2. Nobuhiro Asai:

Hilbert space of analytic functions associated with a rotation invariant measure;

QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal. **23** (2008), 49--62. (査読有)

[学会発表] (計 13 件)

### 1. Nobuhiro Asai:

Probability Measures on  $C$  Associated with the Jacobi Parameters of Continuous Dual Hahn Polynomials, The 6th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (Jan 10-12, 2011) National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea.

### 2. Nobuhiro Asai:

Probability Measures on  $C$  arising from Continuous Dual Hahn Polynomials with Special Parameters, 10th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (Dec 16-17, 2010) 東北大学, 仙台市.

### 3. Nobuhiro Asai:

The construction of various non-Gaussian probability measures on  $C$ , 13th Workshop: Non-Commutative Harmonic Analysis (July 11-17, 2010) The Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland.

### 4. Nobuhiro Asai:

The subordinated probability measure associated with the Jacobi parameters, The 5th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (Jan 6-8, 2010) Chungbuk National University,

Cheongju, Korea.

5. Nobuhiro Asai:

Bargmann-like measures related with the classical orthogonal polynomials, The 30th Conference on Quantum Probability and Related Topics (Sep 16-22, 2009) Pontificia Univesidad Catolica de Chile, Santiago, Chile.

6. Nobuhiro Asai:

The construction of probability measures related with the Jacobi-Szego parameters, 9th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (Sep 11-12, 2009) 東北大学, 仙台市.

7. Nobuhiro Asai:

Probability measures on  $\mathbf{C}$  associated with the Jacobi-Szego parameters of orthogonal polynomials, 12th Workshop: Non-Commutative Harmonic Analysis (Aug 16-22, 2009) The Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland.

8. Nobuhiro Asai:

The Meixner operators on one-mode Fock space and related topics, The 3<sup>rd</sup> Cheongju Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (Jan 12-14, 2009) Chungbuk National University, Cheongju, Korea.

9. Nobuhiro Asai:

On interacting Fock spaces and integral transforms, The 29th Conference on Quantum Probability and Related Topics (Oct 13-18, 2008) Hammamet, Tunisia.

[その他]

ホームページ等

愛知教育大学研究者総覧 (浅井暢宏の頁)

<http://souran.aichi-edu.ac.jp/profile/ja.YoV9zwwkWYmZa12dcXgxBgg==.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

浅井 暢宏 (ASAI NOBUHIRO)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号 : 60399029