様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２３　年　６　月　１０　日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２００８～２０１０
課題番号：２０７４００５４
研究課題名（和文）　マルチフローとメトリック

研究課題名（英文）　Multiflows and metrics

研究代表者
平井　広志（ HIRAI HIROSHI ）
東京大学・大学院情報理工学系研究科・講師
研究者番号：２０３７８９６２

研究成果の概要（和文）：

本課題は，組合せ最適化におけるマルチフロー問題を研究対象とする．70 年代より知られるマルチフローとメトリックの双対性を精密化したタイトスパン双対の理論を展開し，そして発展させた．その成果として当該分野における重要課題となっていた「どのような問題のクラスで組合せ的最大最小型定理とフローの離散性が成立するのか」という問題（Karzanov の問題）を解決し，マルチフロー問題における統一的理論へ向けた大きな一歩を記した．

研究成果の概要（英文）：
We studied multiflow problems in combinatorial optimization. We introduced and developed the tight-span duality theory, which extends the duality relationship between multiflows and metrics, a well-known duality since 70's. As a consequence, We solved Karzanov' s problem, one of important open problems in the literature, which asks a complete characterization for the class of multiflow problems admitting combinatorial min-max theorems and the discreteness of flows. This result is an important step toward a unified theory for multiflow problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計			

研究分野：離散最適化
科研費の分科・細目：数学一般・応用数学
キーワード：マルチフロー，メトリック，ネットワークフロー，最大最小定理

１．研究開始当初の背景

マルチフローとは，通常のネットワークフローにおいて流れる品種を１品種から多品種へと拡張したものであり，そのモデリング能力の高さから VLSI 設計等様々な応用を持つ．にもかかわらず，その理論的理解は現在においても，あまり進んでいるとは言い難く，マルチフロー問題に対する組合せ的多項式時間アルゴリズムは未だ知られていない．その原因としては，最大フロー最小カット定理のような組合せ的な双対定理およびフロー

の整数性が一般に成立しないこと等が挙げられる．しかし，例えば品種を２つに限れば半整数性をもち，最大フロー最小カットに類似した定理(Hu の最大２品種フロー最小カット定理)が成立する．では，どのようなクラスの問題においてそのような組合せ的最大最小定理が成立するのかが問題となる．

７０年代に伊理と翁長-角所により，マルチフローと距離(メトリック)の双対性を示す基本定理が示され，それを基礎にしてマルチフロー問題の「良いクラス」を同定しようという努力がロシアの Karzanov と Lomonosov によって２０年以上にわたり続けられた．９０年代中期に　マルチフロー理論と Dress らに展開されていた距離空間のタイトスパンの理論が結びつく．Karzanov は，メトリック重み付きマルチフロー最大化問題が組合せ的双対解を持つためには「対応するタイトスパンの次元が２以下であること」が必要十分であることを示した．

私はこれらの研究の流れとは独立にタイトスパンの三角不等式を満たないような距離への一般化を行った．これがマルチフロー問題にダイレクトに応用できることがわかり，タイトスパンを系統的に用いるマルチフローの統一的な理論の存在を実感し，そしてそれが組合せ最適化分野において重要な発展をもたらすものを考え，本研究課題を計画するに至った．

２．研究の目的

本研究は，マルチフロー問題の統一的理論の構築を目指すものである．具体的には，フローの離散性と組合せ的最大最小定理のメカニズムを解明し，良いクラスを特徴づけることを目標としている．そのためには一般化された Karzanov の予想：「重みμで定義されるマルチフロー最大化問題に対し，ある正整数ｋが存在して常に 1/k-整数最大流が存在するための必要十分条件は，重みμのタイトスパンの次元が２以下である」を解決することである．そのようなｋが存在すれば必然的に Ford-Fulkerson の最大フロー最小カット定理や Hu の最大２品種フロー最小カット定理のような，組合せ的最大最小定理が成立することになり，過去５０年にわたるマルチフロー研究で得られた数多くの最大最小型定理がこの特殊ケースとして得られる，極めて強力な予想である．

以上は，枝容量を持つ無向ネットワーク上にマルチフローに関する問題であるが，有向ネットワーク上のマルチフローについても，類似の理論を展開することも重要な課題である．

３．研究の方法

本研究における指導原理にあたるものは，上に述べたようにタイトスパン双対と呼ばれるマルチフローの双対性理論である．これは７０年代より知られるマルチフローとメトリックの双対性を精密化したもので，Karzanov や Chepoi の９０年代の仕事を引き継いで，私が最も一般的な形で導入したものである．この理論は，マルチフローの双対問題をタイトスパン上の施設配置問題に帰着させる．そして，タイトスパンの幾何学的形状により，種々の最大最小型定理を導く強力なものである．この理論を磨き上げ，さらなる強力な武器にすることが本研究の目標を達成するための方法論である．

有向マルチフローにもおいても，類似の理論が展開できるものと期待され，これについては南山大学の小市俊吾氏との共同研究を進める．

また国内・国際学会における発表を通して，本研究課題が目指すものを内外にアピールすることで，新たな協力者や共同研究者を得たい．それによって,さらなる発展をもたらすものと考えている．

４．研究成果

（１）本研究課題の第一の目標である Karzanov 予想に関しては，k=24 で肯定的に証明できた．これは組合せ最適化分野における大きな成果である．まずマルチフロー問題の双対として導入したタイトスパン双対の新しい最適性条件を発見した．そして,これに基づいた枝スプリッティングの強力な評価手法を開発した．これにより，これまでの方法では，不可能であったクラスの問題についても,整数フロー,半整数フロー等の存在証明が可能になった．このアイデアをさらに発展させることによって，品種グラフが K3+K3 である実行可能な多品種流許容性問題に関して,ある固定された正整数ｋが存在して，常に 1/k-整数フローが存在するであろうという予想（Karzanov 予想の重要な特殊ケースにあたる）を k=24 で肯定的に解決した．

これにより一般的な予想解決の突破口が開かれた．その準備としてタイトスパン双対を座標系に依存せず,組合せ的に扱うための新しい枠組みを導入した．それは，２次元のタイトスパン双対を，代わりに folder 複体と呼ばれる CAT(0)空間上の施設配置問題として表すのである．この CAT(0)空間との関係そのものもきわめて興味深く，それ自身新たな研究の方向性を示している．

以上の準備のもと，本研究課題の目標であった Karzanov 予想で解決した．証明自体も斬新なアルゴリズム的手法で類をみないものである．実際，この結果の国際的評価は高く２０１０年度の ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC 2010) に extended abstract が採択された．また，この結果にいたるための中間的成果を記した論文も国際的評価の高いジャーナルに採録されることになった．

定数 k=24 が，タイトなのか，それとも改善可能なのかは不明である．下限は 4 であることがわかっている．これを明らかにすることが重要な今後の課題として残った．

（２）有向マルチフロー問題については,南山大学の小市俊吾氏と共同で類似のタイトスパン双対の理論を展開した．有向マルチフロー問題では，双対問題が「対称とは限らないメトリック」の最適化問題となる．我々はこれを有向メトリックと呼ぶ．我々は，有向メトリック，対応する有向距離空間の極小な拡張の一般論を展開した．これにより有向メトリックにおいても，タイトスパンと呼ぶべき普遍的有向距離空間が存在して，任意の極小な拡張は，それに等長的に埋め込まれることを証明した．これは Dress と Isbell による(無向)距離空間の結果の自然な一般化となっている．我々はさらに進んで，「巡回的に極小な拡張」という概念を導入し，これについても普遍的有向距離空間が存在して，任意の巡回的に極小な拡張は，それに等長的に埋め込まれることを証明した．

前者の結果によって有向マルチフロー問題の双対は，有向版タイトスパン上の施設配置問題となり，後者の結果によってオイラーネットワーク上の有向マルチフロー問題の双対は，後者の巡回的極小版タイトスパン上の施設配置問題となることがわかった．そしていくつかの知られた最大最小定理がこの有向版タイトスパン双対から導かれることを証明し，元々の動機である有向マルチフロー理論への応用を確立した．

特に興味深いのは，この巡回的極小版タイトスパンは，トロピカル幾何学の分野で Develin-Strumfels によって全く異なる動機で導入されていたトロピカル多面体に一致することである．これは，トロピカル幾何学と組合せ最適化を結ぶ思いもよらない関係であり，新たな研究の方向性が示された．

（３）枝容量のかわりに点容量が付いたマルチフロー問題についても研究を行った．ここでもタイトスパン双対のテクニック，すなわち，マルチフロー問題の双対をある空間の施設配置問題として表す手法，が有効であった．ここでは，枝容量の場合の「空間に点（施設）を配置する問題」が点容量の場合では，「空間に領域型施設を配置する問題」になることがわかった．この双対性を活かして，Karzanov 予想の類似：「重みμで定義される点容量付きマルチフロー最大化問題に対し，ある正整数 k が存在して常に 1/k-整数最大流が存在するための必要十分条件は，重みμのタイトスパンの次元が１以下である」を証明した．そして k=2 にとれることを証明し，これはタイトな定数となっている．

タイトスパンの次元が１のときは，双対問題は，木の上の領域型施設配置問題となり施設配置問題の文脈で研究されていた．この結果は，あるクラスの木の上の領域型施設配置問題が多項式時間可解になる事実も含んでおり，それ自身，施設配置理論においても重要な結果といえる．

一方，この結果から，整数マルチフロー問題（辺素・点素パス詰込み）における重要定理である Mader の定理の重み付きへの一般化という問題と，どのような重みであれば対応する整数マルチフロー問題は多項式時間可解になるのか，という重み分類の問題に辿り着いた．時を同じくして，ハンガリーの Gyula Pap 氏もこの問題意識に辿り着いており，この件に関して共同研究へと繋がっている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

1. <u>Hiroshi Hirai</u>: Folder complexes and multiflow combinatorial dualities, SIAM Journal on Discrete Mathematics, to appear,（査読有）.

2. <u>Hiroshi Hirai</u>: The maximum multiflow problems with bounded fractionality, The Proceedings of 42th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2010), 42 (2010), 115－120,（査読有）.

3. <u>Hiroshi Hirai</u>: T_x-approaches to multiflows and metrics, In: S. Iwata(ed.), Combinatorial Optimization and Discrete Algorithms, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B23 (2010), pp 107-130,（査読有）.

4. <u>Hiroshi Hirai</u>: Metric packing for K_3 + K_3, Combinatorica 30 (2010), 295-326,（査読有）.

5. <u>Hiroshi Hirai</u>: Tight spans of distances and the dual fractionality

of undirected multiflow problems, Journal of Combinatorial Theory B 99 (2009), 843-868, (査読有).

〔学会発表〕(計１０件)

1. 平井 広志: 重み付き多品種流最大化問題, 第 7 回組合せ論若手研究集会, 2011 年 2 月 22 日, 慶応大学日吉キャンパス.

2. Hiroshi Hirai: Tree metrics and edge-disjoint S-paths, Kyoto Prize Satellite Workshop, 2010 年 11 月 18 日, 東京工業大学大岡山キャンパス.

3. Hiroshi Hirai: The maximum multiflow problems with bounded fractionality, 42th ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC2010), 2010 年 6 月 5 日, Cambridge, USA.

4. 平井 広志: Half-integrality of node-capacitated multiflows and tree-shaped facility locations on trees, 研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 2010 年 3 月 24 日, 統計数理研究所, 東京立川.

5. 平井 広志: Multicommodity flow problems with bounded fractionality, 岡村治子先生退職記念研究集会, 2010 年 3 月 6 日, 甲南大学, 兵庫.

6. Hiroshi Hirai：Bounded fractionality of multiflow feasibility problem for demand graph K3+K3 and other maximization problems, 20th International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2009), 2009 年 8 月 27 日, Chicago, USA.

7. Hiroshi Hirai：Multiflow feasibility problem for demand graph K3+K3, 6th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2009 年 5 月 17 日, Budapest, Hungary.

8. Hiroshi Hirai, Tight spans, metric labeling, and multicommodity flows, Workshop "Discovering Patterns in Biology", 2009 年 3 月 21 日, Chosun Spa Hotel, GyeongJu, Korea.

9. 平井 広志：最大多品種流問題の双対有界分数性, 日本オペレーションズリサーチ学会秋季研究発表会, 2008 年 9 月 11 日, 札幌コンベンションセンター.

10. Hiroshi Hirai：T_x-approaches to multiflows and metrics, Kyoto RIMS Workshop "Combinatorial Optimization and Discrete Algorithms", 2008 年 6 月 10 日, 京都大学数理解析研究所.

６．研究組織

(1)研究代表者
平井 広志 (HIRAI HIROSHI)
東京大学・大学院情報理工学系研究科・講師
研究者番号：２０３７８９６２

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：