

自己評価報告書

平成23年 3月31日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740060

研究課題名（和文）マルコフ過程のエクスカージョン理論の新展開

研究課題名（英文）New development of excursion theory for Markov processes

研究代表者

矢野 孝次 (YANO KOUJI)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80467646

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：マルコフ過程，ブラウン運動，周遊理論

1. 研究計画の概要

マルコフ過程のエクスカージョン（以下、周遊）理論とは、複雑な様相を呈するマルコフ過程の標本路を与えられた点を起終点とする道の断片に分割して得られた周遊点過程の確率論的振る舞いを明らかにする理論であり、標本路の再帰構造を究明する強力な理論である。

本研究の目的は、マルコフ過程の周遊理論を新しい視点から発展させることである。具体的な問題として、マルコフ過程（特に、拡散過程及びレヴィ過程）の極限定理への応用、弱流出境界を持つ消滅ポテンシャルつき拡散過程の標本路の構成、周遊の成す凸集合の端点集合の決定問題、に取り組む。

2. 研究の進捗状況

(1) 約7年前より B. Roynette, P. Vallois, M. Yor の三氏らによって研究されてきたブラウン運動の処罰問題と呼ばれる極限定理において、周遊理論が本質的に関わっていることを見抜いた。そこで、周遊理論の応用として処罰問題を研究した結果、以下のような結果が得られた。(①②はいずれも矢野(裕)氏及び M. Yor 氏との共同研究)

- ① 点正則対称安定過程に対し、局所時間およびカット消滅の処罰問題を示した。それらを支配するシグマ有限測度を、調和変換過程を用いて構成した。
- ② 従属過程を除く安定過程に対し、最大値処罰問題を示した。それを支配するシグマ有限測度は①のものと特異であることが矢野(裕)により得られている。
- ③ ブラウン処罰問題を統一するシグマ有限測度の平行移動に関する準不変性を論じた。その結果、カメロン・マルチンの定理

と並行した結論が得られた。この事実は、三次元ベッセル過程の平行移動において準不変性が壊れ剰余項が現れるという L. Zambotti の結果と対照的で興味深い。

- (2) ブラウン運動の周遊測度は端点性を持っておらず、端点性を持つ正負の反射壁ブラウン運動の周遊測度の和で与えられる。この結果を受けて、ガウス部分を持たない点正則対称レヴィ過程の周遊測度の端点性を調べた。その結果、極めて一般的な仮定の下で、端点性を持つという前述のことと対照的な結論が得られた。端点性は出発点近くで無限回原点を跨いでいるという興味深い結果を導く。

- (3) 周遊測度は原点死滅過程との畳み込み方程式における非自明な解である。これと類似のものに離散時刻 Tsirelson 方程式がある。これは B. Tsirelson による強くない解を持つ確率微分方程式の構成の際に導入されたもので、M. Yor によってトーラスの場合に詳しく調べられた。本研究以前に赤堀・植西との共同研究でコンパクト群への拡張の研究を既に始めていた。本研究ではこの発展として以下のような結果を得た。

- ① 平山氏との共同研究で、コンパクト群の場合の問題はほぼ完全な解決を見た。
- ② 有限グラフ上の道路着色乱歩は自然な類似である。既約エルゴード的乱歩において、強い解であることと道路着色が同期的であることとの同値性を示した(単独研究)。また、任意の既約エルゴード的マルコフ連鎖が同期的道路着色乱歩で表現できるという結果、及び表現が余分な情報を含まないことと置換一様性とが同値であるとい

う結果を得た(安富氏との共同研究).

3. 現在までの達成度

- ①当初の計画以上に進展している。
(理由)

マルコフ過程の周遊理論及びその応用に新展開をもたらすという当初目標は既にかかなりの成功を収めている。しかも、処罰問題への展開及び離散時刻 Tsirelson 方程式論の発展は、当初計画においては予想していなかったほどの目覚ましい成功を収めた。

4. 今後の研究の推進方策

(1) ブラウン運動のいくつかの処罰問題はみな一つのシグマ有限測度に統合される, すなわち, 極限測度はみなそれについて絶対連続である. 一方, 安定過程の処罰問題はカツ消滅と最大値の関数とが互いに特異なシグマ有限測度によって統合される. この事実をより一般的な枠組みで論ずることがどこまで可能かどうか明らかにしたい. 他にも, 統合シグマ有限測度の持つ一般的及び各論的性質を明らかにすべく研究を進める.

(2) 研究計画のうち, 消滅ポテンシャルつき拡散過程の標本路の構成だけは長らく手つかずであったが, 最近になって手がかりを見つけた. この研究を進展させるとともに, スケール極限定理および処罰問題への応用も論じたい.

(3) 力学系に雑音が混ざるとカオスや秩序が誘起されるという現象が計算機実験で報告されている(津田・松本, 佐藤など). この事実に対して何らかの数学的裏付けを与えることは興味深い問題である. 雑音が混ざる写像反復は離散時刻 Tsirelson 方程式の自然な拡張と見ることもできる. 高橋はトールス上の自己同型に雑音が混ざった形の確率方程式の解の性質を論じ, 角は複素力学系のランダム写像を論じており, これらは雑音誘起秩序に関連した結果と考えることができる. 本研究課題の発展の一つとしてこの問題に取り組み, 離散時刻 Tsirelson 方程式あるいは道路着色乱歩の具体的な雑音付き写像反復の挙動を調べたい.

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件) 全て査読有り

- ① K. Yano and K. Yasutomi. Realization of ergodic Markov chain as a random walk subject to a synchronizing road coloring. J. Appl. Probab., 掲載決定.
② T. Hirayama and K. Yano. Extremal solutions for stochastic equations

indexed by negative integers and taking values in compact groups. Stochastic Process. Appl., 120, no. 8, 1404--1423, 2010.

- ③ K. Yano. Cameron-Martin formula for the σ -finite measure unifying Brownian penalizations. J. Funct. Anal., 258, no. 10, 3492--3516, 2010.
④ K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Levy processes without Gaussian part. Potential Anal., 32, no. 4, 305--341, 2010.
⑤ K. Yano, Y. Yano and M. Yor. Penalising symmetric stable Levy paths. J. Math. Soc. Japan, 61, no. 3, 757--798, 2009.

[学会発表] (計 27 件)

- ① 矢野孝次, 離散時刻確率方程式の強い解と強くない解について, Dynamics of complex systems 2011 —時間発展の非可逆性と予測可能性の限界に関する諸分野からの提言—, 2011/3/7, 北海道大学.
② 矢野孝次, Penalising stable Levy paths, 4th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2010/9/3 関西大学.
③ 矢野孝次, Extremality of excursion measure and of σ -finite measure unifying penalizations, 34th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 2010/9/7, 千里ライフサイエンスセンター.
④ 矢野孝次, Stochastic equations indexed by negative integers and taking values in compact groups, Mathematical Finance and Related Topics in Economics and Engineering, 2009/8/15, 関西セミナーハウス.
⑤ 矢野孝次, Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Levy processes without Gaussian part, Stochastic Analysis and Applications, 2008/9/11, 九州大学西新プラザ.

[その他]

論文リストを公開しているホームページ:

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/works.html>